الفصل الرابع

طاقة الموائع المتحركة

Energy of Moving fluids

يحمل المائع المتحرك طاقة يمكن تحويلها من شكل إلى آخر. ونعلم من القانون الأول للديناميكا الحرارية أن معدّل تغير الطاقة (E) يُعطى بالمعادلة

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}} \qquad (4.1)$$

حيث $\dot{Q}$ معدّل تدفق كمية الحرارة إلى المائع و $\dot{W}$ معدّل الشغل المبذول بواسطة المائع على الوسط المحيط به. ينقسم هذا الشغل إلى قسمين شغل المحرك (**Shaft**)، W_s وشغل التدفق، W_f. يمكن حساب شغل التدفق من المعادلة

$$\Delta W_{f2} = P_2 V_2 = P_2 \left(A_2 \mathrm{v}_2 \Delta t \right)$$

حيث $\vec{A}_2 \cdot \vec{\mathrm{v}}_2 = A_2 \mathrm{v}_2$ وبالتالي تصبح المعادلة أعلاه

$$\frac{\Delta W_{f2}}{\Delta t} = P_2\, \vec{\mathrm{v}}_2 \cdot \vec{A}_2$$

وبالمثل نجد أن

$$\frac{\Delta W_{f1}}{\Delta t} = P_1\, \vec{\mathrm{v}}_1 \cdot \vec{A}_1$$

أو عموما

$$\dot{W}_f = P\, \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{A}$$

أو

$$\boxed{\dot{W}_f = \sum_{CS} P\, \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{A} = \sum_{CS} \frac{P}{\rho} \left(\rho\, \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{A} \right)} \qquad (4.2)$$

ولكن للطاقة الحركية نجد أن

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int \rho\, dV \mathrm{v}^2 = \frac{d}{dt}\int \rho \frac{\mathrm{v}^2}{2} dV$$

وبوضع $e_k = \frac{\mathrm{v}^2}{2}$ نحصل على

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho\, e_k dV = \int \frac{d}{dt}(e_k \rho)\, dV + \int (e_k \rho) \frac{dV}{dt}$$

ولكن من المعادلة (**3.1**) وجدنا أن $\frac{dV}{dt} = \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{A}$ وبالتالي تكون

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int (e_k \rho)\, dV + \int (e_k \rho)(\vec{\mathrm{v}} \cdot d\vec{A})$$

وإذا كانت المساحة $\vec{A}$ والسرعة $\vec{v}$ ثابتتان نستبدل التكامل بالمجموع على السطوح حيث نحصل على

$$\boxed{\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e_k\,\rho\,dV + \sum_{CS} e_k\,\rho(\vec{v}\cdot\vec{A})} \tag{4.3}$$

وللطاقات الأخرى نحصل على نفس النتيجة مع مراعات نوع تلك الطاقة، وبالتالي تصبح المعادلة (4.1) في الصورة التالية

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{CV} e\,\rho\,dV + \sum_{CS} e\,\rho(\vec{v}\cdot\vec{A})} \tag{4.4}$$

حيث $e = e_P + e_k + u$ هي مقدار الطاقة على وحدة الكتلة وأن:

$e_P = g\,z$ و $e_k = \dfrac{v^2}{2}$ ، $W = W_f + W_s$.

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{CV}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + u\right)\rho\,dV + \sum_{CS}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + u\right)\rho(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

باستخدام المعادلة (4.2) نحصل على

$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W}_s - \sum_{CS}\frac{P}{\rho}(\rho\,\vec{v}\cdot\vec{A}) = \frac{d}{dt}\int_{CV}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + u\right)\rho\,dV + \sum_{CS}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + u\right)\rho(\vec{v}\cdot\vec{A})} \tag{4.4}$$

ومنها يكون

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \frac{d}{dt}\int_{CV}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + u\right)\rho\,dV + \sum_{CS}\left(\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g\,z + u\right)\rho(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

وللتدفق المستقر يكون $\int_{CV}\left(\dfrac{v^2}{2} + g\,z + u\right)\rho\,dV = const.$ وبالتالي نجد أن

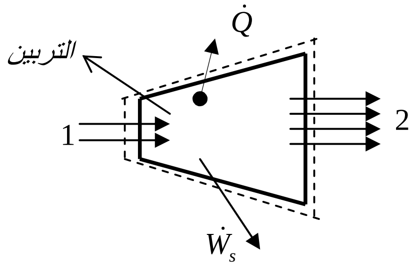
$$\boxed{\dot{Q} - \dot{W}_s = \sum_{CS}\left(\frac{v^2}{2} + g\,z + h\right)\rho(\vec{v}\cdot\vec{A})} \tag{4.5}$$

حيث $h = \dfrac{P}{\rho} + u$ هي الحرارة النوعية ذات الضغط الثابت (**Enthalpy**).

مثال (1):

يستقبل تربين بخاري البخار بضغط $1.4\,MPa$ في درجة حرارة $400^0\mathrm{C}$ والذي يعادل كمية حرارة نوعية مقدارها $3121\,J/kg$. يخرج البخار بضغط مقداره $101\,kPa$ بدرجة حرارة $100^0\mathrm{C}$ والذي يعادل كمية حرارة نوعية ذات ضغط ثابت مقدارها $2676\,J/kg$. يدخل البخار التربين بسرعة $15\,m/s$ ويخرج منه بسرعة $60\,m/s$ ولا يوجد فارق بين ارتفاع نقطة الدخول والخروج. إذا كانت كمية الحرارة المفقودة خلال جدران التربين تساوي $7600\,J/h$ ، ما هي القدرة الناتجة إذا كان معدّل فقدان الكتلة خلال التربين يساوي $0.5\,kg/s$؟

الحل



بكتابة معادلة الطاقة نجد أن

$$\dot{Q}-\dot{W}_s=\sum_{CS}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2}+g\,z+h\right)\rho(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{A})=\left(\frac{\mathrm{v}_2^2}{2}+h_2\right)\rho\,\mathrm{v}_2\mathrm{A}_2+\left(\frac{\mathrm{v}_1^2}{2}+h_1\right)(-\rho\,\mathrm{v}_1\mathrm{A}_1)$$

ومنها نحصل على

$$\dot{W}_s=\dot{Q}+\left(\frac{\mathrm{v}_2^2}{2}+h_2\right)\rho\,\mathrm{v}_2\mathrm{A}_2-\left(\frac{\mathrm{v}_1^2}{2}+h_1\right)\rho\,\mathrm{v}_1\mathrm{A}_1=\rho\,\mathrm{v}_1\mathrm{A}_1\left(\frac{\mathrm{v}_2^2-\mathrm{v}_1^2}{2}+\left(h_2-h_1\right)\right)$$

وبما أن $\dot{m}=\rho_1\,A_1\mathrm{v}_1=\rho_1A_2\mathrm{v}_2=0.5\,kg/h$ ، وأن الفقد في الحرارة سالبا ($\dot{Q}=7600\,\mathrm{J/h}$) فإن

$$\dot{W}_s=\dot{Q}+\dot{m}\left(\frac{\mathrm{v}_2^2-\mathrm{v}_1^2}{2}+\left(h_2-h_1\right)\right)$$

و

$$\dot{W}_s=\frac{-7600}{3600}+0.5\left(\frac{60^2-15^2}{2}+(3121-2676\right)=220\times10^3\,J/s=220\,\mathrm{kW}$$

وعليه تكون القدرة $\dot{W}=220\,kW$.

والآن إذا كانت المنظومة تشتمل على طلمبة وتربين فإن معدل شغل المحرك يشتمل على حدين، هما $W_s = \dot{W}_t - \dot{W}_p$. يمثل $\dot{W}_t$ القدرة التي ينتجها التربين و $\dot{W}_p$ القدرة التي المعطاة للطلمبة. في أثناء حركة المائع تُفقد كمية من الطاقة الحركية للمائع وتتحول إلى حرارة بسبب قوى اللزوجة بين جزئيات المائع وربما زادت الطاقة الداخلية للمائع. أو ربما تسربت كمية من الحرارة ($-\dot{Q}$) المتولدة نتيجة لتبديد الطاقة عبر الأنبوب . تُدمج هذه الطاقة المتبددة في حد يُعرف باسم رأس الفقد (**Head Loss**)، h_L حيث يقل ارتفاع المائع في الأنبوب. ويكون متوسط طاقة الحركة $\alpha \dfrac{\bar{v}^2}{2g}$، حيث $\bar{v}$ السرعة المتوسطة و α مقدار التصحيح المطلوب لطاقة الحركة والذي يُعطى بالعلاقة

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{v}{\bar{v}}\right)^3 dA} \qquad (4.6)$$

نحصل على السرعة المتوسطة من العلاقة

$$\boxed{Q = \bar{v}A = \int v\,dA} \qquad (4.7)$$

أو

$$\bar{v} = \frac{1}{A}\int v\,dA$$

ونكتب معادلة الطاقة أعلاه في الصورة

$$\frac{P_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_t + h_L$$

حيث:

$h_p = \dfrac{\dot{W}_p}{\dot{m}g}$ الارتفاع (الرأس) المزود من الطلمبة

و $h_t = \dfrac{\dot{W}_t}{\dot{m}g}$ الرأس المعطاة للتربين.

وبالتعويض عن $\dot{m} = \rho Q,\ \gamma = \rho g$ تكون

$$\boxed{h_p = \frac{\dot{W}_p}{Q\gamma}} \quad ، \quad \boxed{h_t = \frac{\dot{W}_t}{Q\gamma}} \qquad (4.8)$$

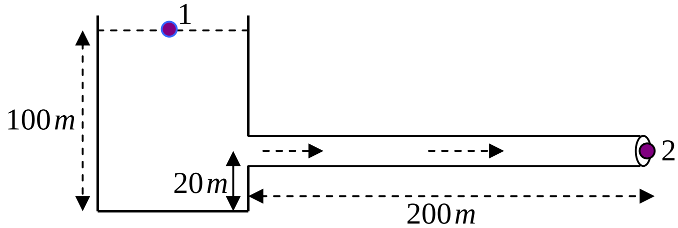
مثال (2):

تحمل أنبوبة موضوعة أفقيا طولها L وقطرها D ماءا باردا في مفاعل نووي حراري من خزان من الماء بسرعة متوسطة $\overline{\mathrm{v}}$ ، كما موّضح أدناه. إذا كان رأس الفقد في الأنبوبة يُعطى بالعلاقة التالية

$$h_L = 0.02\left(\frac{L/D}{2g}\right)\overline{\mathrm{v}}^2$$

أوجد الضغط على مسافة $100\,m$ من الخزان إذا كان معّدل التدفق $Q = 0.06\,m^3/s$ و $D = 0.2\,m$. خذ $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

الحل:



بتطبيق معادلة الطاقة عند النقطتين $1,2$ نحصل على

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\mathrm{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

بتعويض

$$P_1 = 0, \mathrm{v}_1 = 0, z_1 = 100\,m, z_2 = 20\,m, \mathrm{v}_2 = \frac{Q}{A_2}, A_2 = \frac{\pi}{4}D^4 = \frac{\pi}{4}(0.2)^4,\ \mathrm{v}_2 = 1.91\,m/s$$

و

$$h_L = 0.02\left(\frac{L/D}{2g}\right)\overline{\mathrm{v}}^2 = 0.02\left(\frac{200/0.2}{2(9.8)}\right)(1.91)^2 = 37.2\,m$$

نحصل على

$$\frac{P_2}{\gamma} = 100 - 20 + \frac{(1.91)^2}{2(9.8)} + 37.2 = 42.6\,m$$

ومنها نحصل على

$$P_2 = 42.6\gamma = 42.6(9800) = 417900\,\mathrm{Pa}.$$

مثال (3):

إذا كان توزيع سرعة مائع ينساب خلال أنبوبة يُعطى بالعلاقة

$$\overline{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_{\max}\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)$$

حيث r_0 نصف قطر الأنبوبة و r المسافة المركزية من مركز الأنبوبة. أوجد السرعة المتوسطة للمائع والتصحيح α.

الحل

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{1}{\mathrm{A}}\int \mathrm{v}\,\mathrm{dA} = \frac{1}{\pi \mathrm{r}_0^2}\int \mathrm{v}_{\max}\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)(2\pi r\,dr)$$

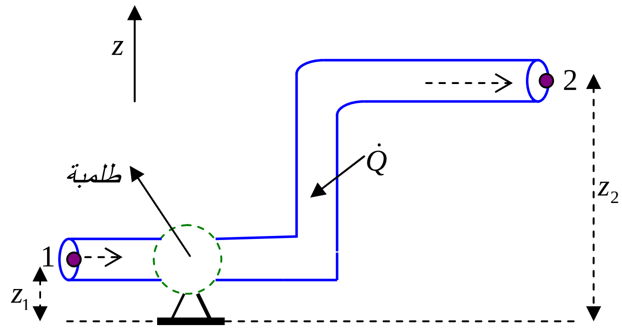
$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{1}{\pi \mathrm{r}_0^2}\int_0^{\mathrm{r}_0} \mathrm{v}_{\max}\,(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2)(2\pi r\,dr) = \frac{\mathrm{v}_{\max}}{2}$$

إذا تكون السرعة المتوسطة نصف السرعة القصوى. بالتعويض في المعادلة أعلاه نجد أن

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{A}}\int\left(\frac{\mathrm{v}}{\overline{\mathrm{v}}}\right)^3 \mathrm{dA} = \frac{1}{\pi \mathrm{r}_0^2}\int_0^{\mathrm{r}_0}\frac{\mathrm{v}_{\max}^3}{\left(\frac{\mathrm{v}_{\max}}{2}\right)^3}\left(1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)^3(2\pi r\,dr) = 2$$

مثال (4):

في الشكل أدناه، إذا كان قطر الأنبوبة $d = 0.5m$ ومعّدل التدفق $Q = 0.5m^3/s$ وارتفاع النقطتين $z_1 = 30m$ و $z_2 = 40m$ والضغط $P_1 = 70\,\mathrm{kPa}$. ما هي القدرة اللازمة لتُعطى للمائع بواسطة الطلبة إذا كان $P_2 = 350\,\mathrm{kPa}$؟، بفرض أن $h_L = 3m$ و $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.



الحل

بتطبيق معادلة الطاقة عند النقطتين نحصل على

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1+h_p=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2+h_L$$

حيث $P_1=70\,\text{kPa}$, $P_2=350\,\text{kPa}$ و $Q=0.5\,\text{m}^3/s$, $v_1=\dfrac{Q}{A_1}$, $A_1=\dfrac{\pi}{4}d^2=\dfrac{\pi}{4}(0.5)^2$

ومنها تكون $v_1=2.55\,m/s$. بتعويض هذه المقادير في معادلة الطاقة نحصل على

$$h_p=\frac{P_2-P_1}{\gamma}+\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}+z_2-z_1+h_L$$

$$h_p=\frac{(350-70)(1000)}{9800}+\frac{(2.55)^2-(2.55)^2}{2(9.8)}+40-30+3$$

$$h_p=41.5\,m$$

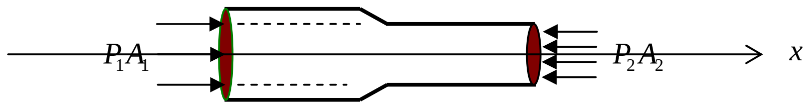
وتكون القدرة المعطاة للماء بواسطة الطلمبة

$$\dot{W}_p=h_pQ\gamma=41.5(0.5)(9800)=204\times10^3\,\text{W}=204\,\text{kW}$$

مثال (5):

ينساب الماء خلال أنبوبة بمعدّل تدفق $Q=0.707\,m^3/s$ ليمر خلال أنبوبة أخرى متصلة معها قطرها $d_1=0.3\,m$. إذا كان رأس الفقد هو $h_L=0.2\left(\dfrac{v_2^2}{2g}\right)$ حيث v_2 هي سرعة الماء خلال الأنبوبة ذات القطر $d_2=0.2\,m$ ، ما هي القوة الأفقية اللازمة لجعل المنظومة ثابتة إذا كان $P_1=70\,\text{kPa}$ ؟

الحل



إذا كانت القوة الأفقية التي يؤثر بها المائع هي F_x فإن محصلة القوى في اتجاه المحور الأفقي بسبب الضغط الخارجي هي

$$\sum F_x = F_x + P_1A_1 - P_2A_2$$

ولكن

$$\sum F_x = \sum_{CS} \rho\left(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{A}\right)\mathrm{v_x} = \rho\left(-\mathrm{v}_1A_1\right)\mathrm{v}_{1x} + \rho\left(\mathrm{v}_2A_2\right)\mathrm{v}_{2x}$$

وبم أن $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_{1x}\,,\ \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_{2x}$ تصبح المعادلة أعلاه

$$F_x + P_1A_1 - P_2A_2 = \rho A_2\mathrm{v}_2^2 - \rho A_1\mathrm{v}_1^2$$

ومنها

$$F_x = P_2A_2 - P_1A_1 + \rho A_2\mathrm{v}_2^2 - \rho A_1\mathrm{v}_1^2 = \rho Q(\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1) + P_2A_2 - P_1A_1$$

وذلك لأن $A_2\mathrm{v}_2 = A_1\mathrm{v}_1$ من معادلة الاستمرارية. لإيجاد الضغط P_2 نستخدم معادلة الطاقة عند النقطتين 1,2

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} + \mathrm{z}_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\mathrm{v}_2^2}{2g} + \mathrm{z}_2 + h_L$$

بافتراض أن $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. بالتعويض عن $\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2$ نحصل على

$$P_2 = P_1 - \gamma\left(\frac{\mathrm{v}_2^2 - \mathrm{v}_1^2}{2g}\right) + h_L$$

حيث

$$\mathrm{A}_1 = \frac{\pi}{4}\mathrm{d}_1^2 = \frac{\pi}{4}(0.3)^2 = 0.0707,\ \mathrm{A}_2 = \frac{\pi}{4}\mathrm{d}_2^2 = \frac{\pi}{4}(0.2)^2 = 0.0314,$$

$$\mathrm{v}_1 = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}_1} = \frac{0.707}{0.0707} = 10\,\mathrm{m/s}\ ,\ \mathrm{v}_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.707}{0.0314} = 22.5\,m/s$$

إذاً تصبح القوة أعلاه في الصورة

$$F_x = \rho Q(\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1) + P_2A_2 - P_1A_1$$

وبالتعويض عن المقادير المختلفة نجد أن $F_x = -1880\,\text{N}$. هذا يعني أنه يلزمنا تأثير قوة مقدارها $1880\,\text{N}$ ناحية اليمين حتى لا تتحرك المنظومة نتيجة لحركة المائع في الأنبوبة.

مثال (6):

تسحب طلمبة ماء من خزان ارتفاع سطحه العلوي $156\,m$ لتدفعه خلال أنبوبة طولها $1500\,m$ وقطرها $0.3\,m$. تخرج الأنبوبة الماء من الخزان بمعدّل $0.27\,m^3/s$ إلى خزان آخر ارتفاع سطحه العلوي $186\,m$. إذا كان رأس الفقد في الأنبوبة هو $h_L = 0.01\dfrac{(L/D)\text{v}^2}{2g}$، أحسب الرأس الذي تزود به الطلمبة الماء في الأنبوبة والقدرة الناتجة للتدفق، علما بأن الأنبوبة موضوعة أفقيا.

الحل

نستخدم معادلة الطاقة

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{\text{v}_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\text{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

بتعويض $z_1 = 156\,m, z_2 = 186\,m,\ \text{v}_1 = \text{v}_2 = 0, P_1 = P_2 = 0$ تصبح المعادلة أعلاه $z_1 + h_p = z_2 + h_L$ حيث

$$h_L = 0.01\frac{(L/D)\text{v}^2}{2g} = 0.01\frac{(1500/0.3)\text{v}^2}{2(9.8)} = 2.55\,\text{v}^2$$

و

$$\text{v} = \frac{Q}{A} = \frac{0.27}{\frac{\pi}{4}(0.3)^2} = 3.8\,m/s$$

ومنها $h_L = 2.55 \times (3.8)^2 = 37.2\,m$. إذاً $h_p = 37.2\,m$ وتكون القدرة التي تزود بها الطلمبة التدفق

$$\dot{W}_p = \gamma Q\, h_p = (9800)(0.27)(37.2) = 98444.8\,\text{W} = 98.44\,\text{kW}.$$

مثال (7):

تملى أنبوبة ثابتة القطر بماء تحت درجة حرارة ثابتة. عند قفل الصمام يكون فرق الضغط بين النقطتين 1 و 2 يساوي $P_1 - P_2 = 75\,\text{kPa}$. عندما يُفتح الصمام وينساب الماء بمعدّل تدفق يساوي $550\,m^3/h$ ويصير فرق الضغط بين النقطتين 1 و 2 $160\,\text{kPa}$.
أوجد رأس الفقد بسبب الاحتكاك بين النقطتين 1 و 2.

الحل

في حالة الصمام مغلق يكون الماء ساكن، ويُعطى فرق الضغط بالعلاقة $P_1 - P_2 = \rho g (z_1 - z_1)$ وبالتعويض نحصل على $(z_1 - z_1) = \dfrac{P_1 - P_2}{\rho g} = \dfrac{75(10^3)}{(1000)(9.8)} = 7.6\,m$. عندما يُفتح الصمام يتحرك الماء وبالتالي يمكن استخدام معادلة الطاقة

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \sum_{CS} \left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} + g\,z + h \right) \rho (\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{A})$$

أو

$$\dot{W}_s = \dot{Q} + \left(\frac{\mathrm{v}_2^2}{2} + g\,z_2 + h_2 \right) \rho\,\mathrm{v}_2 \mathrm{A}_2 - \left(\frac{\mathrm{v}_1^2}{2} + g\,z_1 + h_1 \right) \rho\,\mathrm{v}_1 \mathrm{A}_1$$

$$\dot{W}_s = \rho Q \left(\frac{\mathrm{v}_2^2 - \mathrm{v}_1^2}{2} + (h_2 - h_1) + g(z_2 - z_1) \right)$$

$$\dot{W}_s = \rho Q \big((h_2 - h_1) + g(z_2 - z_1) \big) = \rho Q \left(\frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_2 - z_1) \right)$$

أو

$$\dot{W}_s = \rho Q \left(\frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_2 - z_1) \right)$$

حيث $h_1 - h_2 = \dfrac{P_2 - P_1}{\rho} + (u_2 - u_1)$ ولدرجة الحرارة الثابتة $u_1 = u_2$ ولكمية الحرارة الثابتة $\dot{Q} = 0$ وللقطر الثابت تكون $\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2$.

يُعطى رأس الفقد بالعلاقة $h=\dfrac{\dot{W}_s}{Q\gamma}=\dfrac{\dot{W}_s}{Q\rho g}$ والتي نحصل عليها من المعادلة أعلاه،

أي

$$h=\frac{\dot{W}_s}{\gamma Q}=\left(\frac{P_1-P_2}{\rho g}+(z_1-z_2)\right)$$

أو

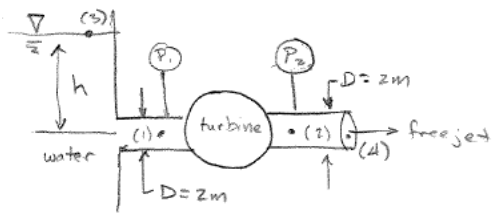
$$h=\frac{(P_1-P_2)}{\rho g}+(z_1-z_2)$$

وبالتعويض نحصل على

$$h=\frac{160(10^3)}{10^3(9.8)}+(7.6)=23.9m$$

مثال (8):

يعمل تربين كما موضح في الشكل أدناه بقدرة $2500\,\text{kW}$ ومعدّل تدفق $20m^3/s$.



إذا كان رأس الفقد خلال التربين صغيرا، ولكن رأس الفقد عبر التدفق كله هو $2.5m$ وقطر الأنبوبة $D=2m$، أحسب

أ- فرق الضغط عبر التربين

ب- الارتفاع h إذا كان $\dot{Q}=0$ ودرجة الحرارة ثابتة والتدفق منتظم.

الحل

أ- من معادلة الطاقة نجد أن

$$\dot{W}_s = \dot{Q} + \left(\frac{v_2^2}{2} + g\,z_2 + h_2\right)\rho\, v_2 A_2 - \left(\frac{v_1^2}{2} + g\,z_1 + h_1\right)\rho\, v_1 A_1$$

$$\dot{W}_s = \rho Q\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + (h_2 - h_1) + g(z_2 - z_1)\right)$$

$$\dot{W}_s = \rho Q\left((h_2 - h_1) + g(z_2 - z_1)\right) = \rho Q\left(\frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_2 - z_1)\right)$$

حيث $\dot{Q} = 0$ و $v_1 = v_2$ (لأن $D_1 = D_2$) و $z_1 = z_2$ $u_1 = u_2$ (لأن درجة الحرارة ثابتة).

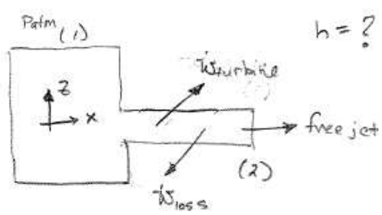
وبتعويض هذه الكميات نحصل على

$$\dot{W}_s = Q(P_1 - P_2)$$

ومنها

$$P_1 - P_2 = \frac{\dot{W}_s}{Q} = \frac{2500(10^3)}{20} = 125\,\text{kPa}$$

ب- في هذه الحالة $P_1 = P_2 = P_0$ و $v_1 << v_2$ ، $z_1 - z_2 = h$



وتصبح معادلة الطاقة

$$\dot{W}_1 + \dot{W}_2 = \dot{Q} + \left(\frac{v_2^2}{2} + g\,z_2 + h_2\right)\rho\, v_2 A_2 - \left(\frac{v_1^2}{2} + g\,z_1 + h_1\right)\rho\, v_1 A_1$$

$$\dot{W}_1 + \dot{W}_2 = \rho Q\left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1)\right)$$

$$\frac{\dot{W}_1 + \dot{W}_2}{\rho g Q} = \left(\frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2 - P_1}{g\rho} + h\right)$$

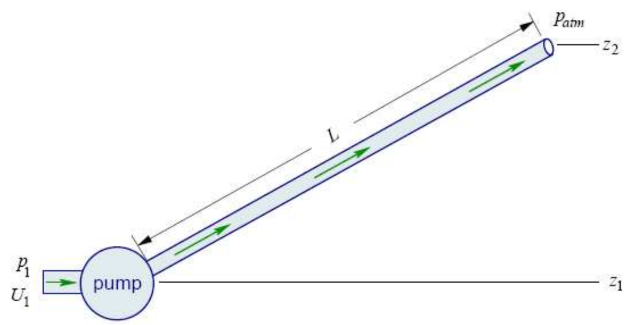
حيث $\dot{W}_1$ معّدل شغل التربين و $\dot{W}_2$ معّدل الشغل بواسطة الاحتكاك. ويُعطى رأس الفقد بسبب الاحتكاك بالعلاقة $h_L = \dfrac{\dot{W}_2}{\rho g Q}$. وبوضع $Q = 20\,m^3/s$ في معادلة الاستمرارية، نجد أن $\text{v}_2 = \dfrac{Q}{A_2} = \dfrac{20}{\frac{\pi}{4}(2)^2} = 6.37\,m/s$. وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على

$$\frac{\dot{W}_1}{\rho g Q} + h_L = \frac{\text{v}_2^2}{2g} + \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + h$$

حيث $\dot{W}_1 = 2500\,\text{kW}$ و $P_1 = P_2 = P_0$ و $\text{v}_2 = 6.37\,m/s$ و $h_L = 2.5\,m$ ومنها نجد أن $h = 13.2\,m$.

مثال (9):

أوجد قدرة الطلمبة ونصف قطر الاسطوانة الموضحة في الشكل أدناه بحيث تكون سرعة الماء عند الطرف العلوي ضعف سرعة الماء التي يسحب بها الماء من أسفل إذا كان $z_2 = 4z_1$ و $P_1 = 3p_2 = 3P_0$.



الحل

بتطبيق معادلة بيرنولي على النقطتين 1, 2 نحصل على

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{\text{v}_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\text{v}_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

و

$$\frac{3P_2}{\gamma} + \frac{\text{v}_1^2}{2g} + z_1 + h_p = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\text{v}_2^2}{2g} + 4z_1 + h_L$$

وبما أن $\text{v}_2 = 2\text{v}_1$ نجد أن $h_p = \dfrac{3\text{v}_1^2}{2g} - \dfrac{2P_0}{\gamma} + 3z_1 + h_L$ وقدرة الطلمبة $\dot{W}_p = \dot{m} g h_p$.

$$\dot{m}_2 = \rho \mathrm{v}_2 A_2 = \rho (2\mathrm{v}_1)(\frac{\pi}{4} D_2^2)$$

و

$$\dot{m}_1 = \rho (\mathrm{v}_1)(\frac{\pi}{4} D_1^2)$$

ولكن من معادلة الاستمرارية

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

ومنها نجد أن

$$D_1 = \sqrt{2}\, D_2$$

ومن عدد رينولدز نجد أن

$$R_e = \frac{\rho \mathrm{v}_1 \mathrm{D}_1}{\eta} = \frac{\rho \mathrm{v}_2 \mathrm{D}_2}{\eta} = \frac{2\rho \mathrm{v}_1 \mathrm{D}_2}{\eta}$$

ويكون رأس الفقد

$$h_L = f \frac{L}{D}\left(\frac{\mathrm{v}_2^2}{2g}\right) = 128\eta L \frac{\mathrm{v}_1^2}{D_1^2 g}$$

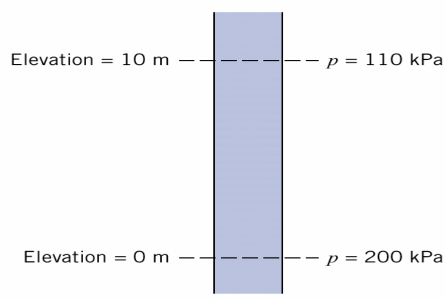
حيث للتدفق الطبقي $f = \frac{64}{R_e}$. وبالتعويض في المعادلة

$h_p = \frac{3\mathrm{v}_1^2}{2g} - \frac{2P_0}{\gamma} + 3z_1 + h_L$ مع استخدام المعادلة $\dot{W}_p = \dot{m} g h_p = \rho\left(\frac{\pi}{4} D_1^2\right)\mathrm{v}_1 g h_p$

نحصل على قدرة الطلمبة.

مثال (10):

إذا كان تسارع السائل الموضح أدناه صفرا ومعامل لزوجته $3\times10^{-3}\, N\, s/m^2$ ووزنه النوعي $\gamma = 8 kN/m^3$ وقطر الأنبوبة $D = 1cm$. أوجد سرعة السائل.



الحل

من معادلة الطاقة نجد أن للنقطتين 1, 2 العلاقة

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{\text{v}_1^2}{2\text{g}}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{\text{v}_2^2}{2\text{g}}+z_2+h_L$$

وبالتعويض نحصل على

$$\frac{200(10^3)}{800}+\frac{0}{2(9.8)}+0=\frac{110(10^3)}{800}+\frac{0}{2\text{g}}+10+h_L$$

ومنها نجد أن

$$h_L=1.25\,m$$

ولكن من معادلة دارسي- ويسباخ نجد أن

$$h_L=\frac{32\eta L\bar{\text{v}}}{\gamma D^2}$$

وبالتعويض نحصل على السرعة المتوسطة للسائل

$$\bar{\text{v}}=\frac{h_L\gamma D^2}{32\eta L}=\frac{1.25(800)(0.01)^2}{32(3\times10^{-3})(10)}=1.04\,m/s$$

مثال (11):

يسري زيت كثافته $970\,kg/m^3$ في أنبوبة أفقية قطرها $0.4\,m$. أوجد الفرق في الضغط على مسافة $30\,m$ من الأنبوبة.

الحل:

تُعطى سرعة الزيت بالعلاقة

$$\text{v}=\frac{Q}{A}=\frac{0.02}{\frac{\pi}{4}(0.4)^2}=0.079\,m/s$$

ومن عدد رينولدز نجد أن

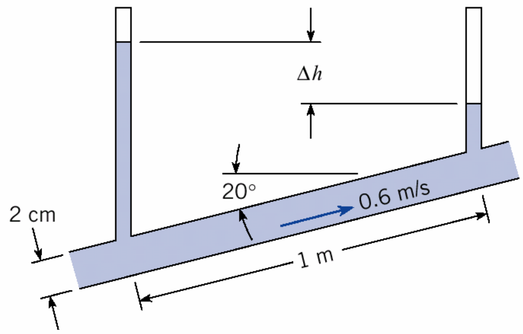
$$\text{R}_\text{e}=\frac{\text{v}\,\text{D}\rho}{\eta}=\frac{0.079(0.4)(970)}{0.97}=316$$

يُعطى فرق الضغط بالمعادلة

$$\Delta P=\frac{32\eta L\,\text{v}}{D^2}=\frac{32(0.097)(30)(0.079)}{(0.4)^2}=45.9\,N/m^2$$

مثال (12):

يمر جلسرين كما في الشكل أدناه، أوجد Δh إذا كانت $\gamma = 12300\, N/m^3$ و $\eta = 0.62\, N\,s/m^2$.



الحل:

نجد من معادلة الطاقة أن

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_L$$

ومنها نجد أن

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + h_L$$

ومنها نجد أن

$$\Delta h = \left(\frac{P_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\gamma} + z_2\right) = h_L$$

ومن عدد رينولدز نجد أن

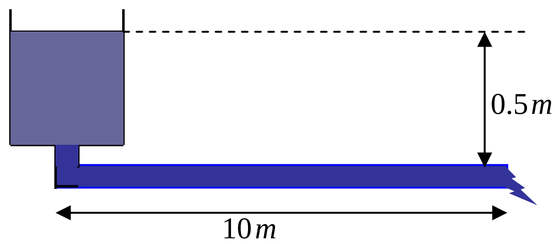
$$R_e = \frac{v\,D\rho}{\eta} = \frac{6(0.02)(12300/9.8)}{0.62} = 23.5$$

هذا يعني أن التدفق طبقيا وبالتالي يكون

$$h_L = \frac{32\eta L\,v}{D^2\gamma} = \frac{32(0.62)(1)(6)}{(0.02)^2(12300)} = 2.42\,m$$

مثال (13):

يجري كيروسين كثافته $940\,kg/m^3$ ومعامل لزوجته $0.048\,Ns/m^2$ في أنبوبة أفقية قطرها $5cm$ ، كما في الشكل أدناه. أوجد النقصان في الضغط على مسافة $10m$ من بداية الجريان إذا كان معدّل التدفق $2\times10^{-3}\,m^3/s$.



الحل:

للجريان الطبقي $h_L = \dfrac{32\eta L\,\mathrm{v}}{\mathrm{D}^2\gamma}$. ومن معادلة الطاقة نحصل على

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{\mathrm{v}_1^2}{2\mathrm{g}}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{\mathrm{v}_2^2}{2\mathrm{g}}+z_2+h_L$$

حيث $z_1 = 0.5m$ و $z_2 = 0$ و $\mathrm{v}_1 = 0$ و $P_1 = P_2 = P_0$. إذاً فإن

$$0.5=\frac{\mathrm{v}^2}{2g}+\frac{32\eta L\,\mathrm{v}}{\mathrm{D}^2\gamma}$$

أو

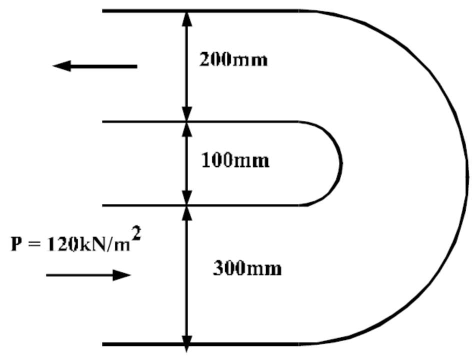
$$\mathrm{v}^2+13\mathrm{v}-9.8=0$$

ومنها نحصل على $\mathrm{v} = 0.71m/s$. يُعطى النقصان في الضغط بالعلاقة

$$\Delta P=\frac{32\eta\,L\,\mathrm{v}}{D^2}=\frac{32(0.048)(10)(0.71)}{(0.05)^2}=4362.2\,N/m^2$$

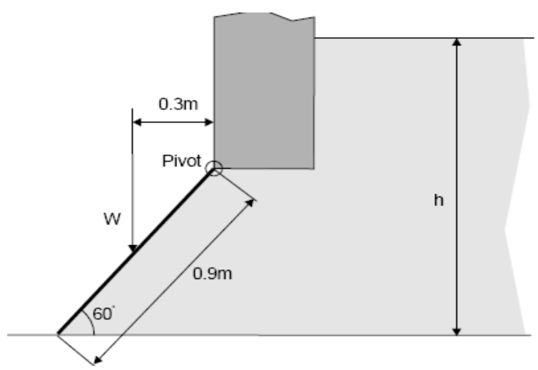
تمرين:

1- ينساب ماء في أنبوبة دائرية فثيت الأنبوبة راسيا بزاوية 180^0 بواسطة انحناء كما في الشكل أدناه.



إذا كان معّدل التدفق في الأنبوبة يساوي $20\,Litre/s$ وكان الضغط عند مدخل الانحناء يساوي $120\,\mathrm{kN/m^3}$ وحجم الانحناء يساوي $0.1m^3$ ، ما هو اتجاه ومقدار القوة التي يؤثر بها الماء على الانحناء ؟ (الإجابة: $12197\,N,\ \theta = 4.61^0$).

2- ثُبت باب مستطيل الشكل عند قاعة خزان بواسطة مُعلق لينظم حركة ماء، كما في الشكل أدناه.

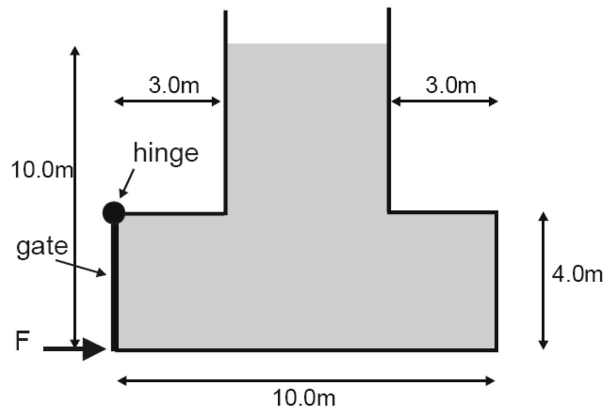


يعمل الباب على تنظيم مستوى الماء في الخزان حيث يفتح عندما يصل مستوى الماء علي يمينه، h عمقا محددا. إذا كان عرض الباب $1.2m$ ومركز

ثقله يساوي $0.3m$ من الحائط، ما هو وزن الباب W اللازم عندما يكون مستوى الماء $h = 2.779m$ ليصبح الباب على وشك أن يفتح؟

(تلميح: يفتح الباب عندما يكون العزم عند المعلق في اتجاه عقارب الساعة). (الإجابة: $W = 4\times10^3 N$).

3- في الشكل أدناه، أوجد



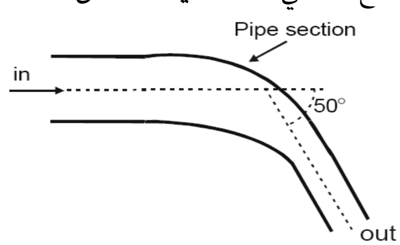
أ- وزن الماء في الخزان.

ب- الضغط عند قاعدة الخزان

جـ- إذا كانت مساحة القاعدة تساوي $(10m\times5m)$ $50m^2$ فما هو مقدار القوة التي يؤثر بها الماء على قاعدة الخزان؟

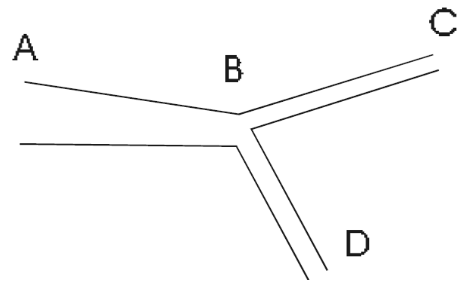
د- مقدار القوة F اللازمة حتى يبقى الباب مغلقاً.

4- ينساب الماء بتدفق بمعدّل $0.5m^3/s$ من أنبوبة قطرها $0.5m$ متصلة بأخرى قطرها $0.25m$ تميل بزاوية 40^0 مع الأفقي، كما في الشكل.



إذا كان الضغط عند الأنبوبة الخارجة (**Out**) يساوي $200\,\text{kPa}$ ، ما هو مقدار القوة اللازمة التي يؤثر بها الماء لكي تعمل على تثبيت المنظومة في مكانها؟ (الإجابة: $F = 33876\,N$ و $\theta = -71.27^0$).

5- يجري ماء في أنبوبة دائرية قُلِص قطرها عند A من $0.5m$ إلى $0.35m$ عند B. إذا تفرعت الأنبوبة إلى قسمين قطر الأولى $0.15m$ والثانية $0.225m$ ليخرج الماء عند النقطتين C و D ، وكانت سرعة الماء عند A و D تساوي $1.0m/s$ ، أوجد:



أ- سرعة الماء عند النقطتين B و C (الإجابة: $4.853m/s$, $1.307m/s$)

ب- معّدل تدفق الماء عند C و D (الإجابة: $0.0859m^3/s$, $0.1257m^3/s$)

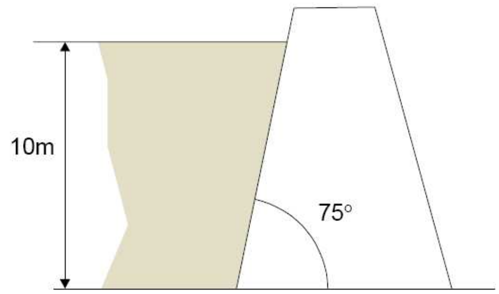
جـ- إذا كانت النقطة A أعلى من B بمقدار $10m$ والضغط عند A يساوي $10\,\text{kPa}$ ، أوجد الضغط عند B (الإجابة: $107746\,\text{Pa}$).

5- مُلِء صهريج بماء إلى ارتفاع $2m$ ثم صُبت عليه طبقة من الزيت عمقها $1\,m$. إذا كانت كثافة الزيت $800\,kg/m^3$ ، ما هو مقدار القوة الواقعة (على

وحدة العرض) على جدران الصهريج وخط عملها على الجدار؟ (الإجابة: $2.033m$, $39240\,N$).

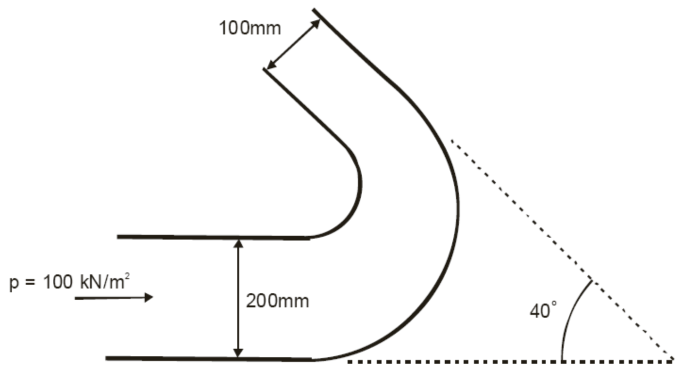
6- يخرج الماء في الهواء من فتحة خرطوش قطره $0.08m$ بسرعة $20m/s$. إذا كان فم الخرطوش ينتهي بفتحة صغيرة قطرها $0.025m$ ، ما هو مقدار القوة التي يؤثر بها الماء على هذه الفتحة ؟ (الإجابة: $-176\,N$).

7- شُيّد سد من الخرصانة، كما هو موّضح في الشكل أدناه. أوجد مقدار القوة التي يؤثر بها الماء على السد لكل وحدة عرض من السد، واتجاهها وخط عملها.



(الإجابة: $507668N$, 15^0, $6.9m$)

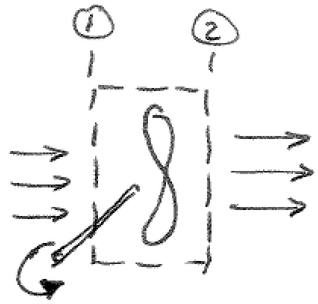
8- إذا كان معّدل تفريغ الماء من انحناء بزاوية مقدارها 240^0 هو $30\,Litre/s$ ، كما موضح أدناه ، حيث يقع هذا الانحناء أفقيا. أوجد مقدار القوة التي يؤثر بها الماء على الانحناء؟



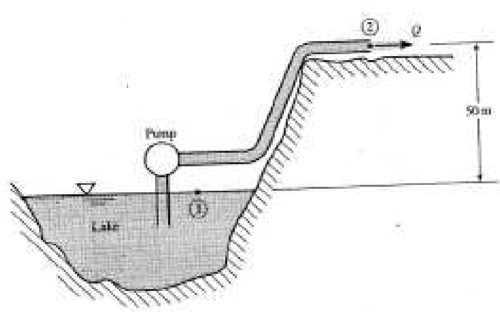
(الإجابة: $-2580\,N$, -12.2^0)

9- تتلقى سيارة مطافئ الماء بتدفق $0.04m^3/s$ لتضخه إلى أقصى ارتفاع $18m$ من مستوى الأرض. إذا كان الماء يتدفق لخزان المطافئ خلال أنبوبة نصف قطرها $0.03m$ بضغط مقداره $100\,\text{kPa}$ ، ما هي القدرة التي يجب على الطلمبة تزويد خزان المطافئ بها؟

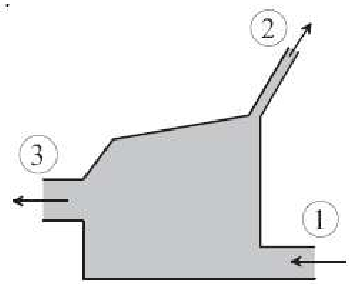
10- يعمل موتور بقدرة $4\,\text{kW}$ لتدوير مروحة تهوئه (**Ventilation Fan**) لتخرج تيار هواء قطره $0.8m$ بسرعة $15m/s$. أحسب قدرة الموتور اللازمة لعمل ذلك، بفرض أن كمية الحرارة $\dot{Q}=0$. خُذ كثافة الهواء $1.2kg/m^3$. (الإجابة: $1.017\,\text{kW}$)



11- تسحب طلمبة، كما في الشكل أدناه، الماء بمعدّل $0.03m^3/s$ من بحيرة لترفعه إلى أعلى قمة جبل ارتفاعه $50m$ عبر أنبوبة قطرها $80mm$ وطولها $200m$. أوجد القدرة اللازمة للطلمبة.



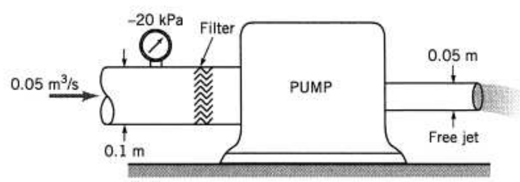
12- يتدفق ماء من جهاز، كما موضح في الشكل أدناه، خلال ثلاثة فتحات إذا كان عرضها على النحو التالي: $D_1=9cm$ و $D_2=7cm$ و $D_3=4cm$ وتدفق الماء منها هو على النحو التالي: $Q_1=220m^3/h$ و $Q_2=100m^3/h$ والضغط عندها على النحو التالي: $P_1=150\,\text{kPa}$ و $P_2=235\,\text{kPa}$ و $P_3=265\,\text{kPa}$. أوجد اتجاه الشغل الذي يبذله المحرك (**Shaft**) إذا كانت العملية تحت درجة حرارة وكمية حرارة ثابتتين، مع تجاهل الجاذبية. الإجابة: $\dot{W}_s=-15.82\,\text{kW}$.



13- تنقل أنبوبة قطرها $90cm$ زيت نقى ساخن كثافته $800kg/m^3$ بمعّدل تدفق 1.5 مليون برميل في اليوم. إذا كان معدل الفقد في ارتفاع الزيت يساوي

$420cm$ لكل $300m$ من الأنبوبة. يُراد إقامة عدة محطات لضخ الزيت بعد كل 16 كيلومتر من طول الأنبوبة. ما هي قدرة كل مضخة (طلمبة). الإجابة: $4.88\,\mathrm{MW}$ أو $6545hp$.

14- تزود طلمبة الماء بقدرة $20\,\mathrm{kW}$. أوجد رأس الفقد لهذا المرشح (**Filter**) إذا كان الفقد الوحيد بسبب هذا المرشح.



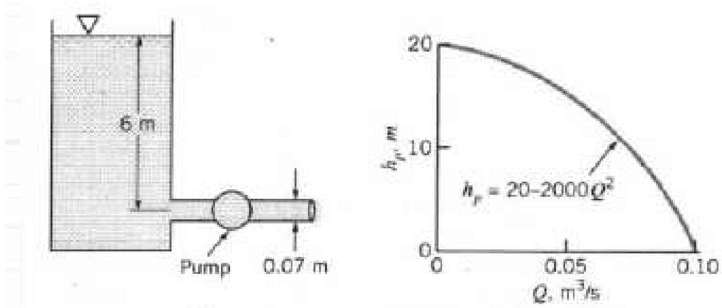
(الإجابة: $7.68m$)

15- جلسرين كثافته $1259kg/m^3$ ومعامل لزوجته $1.491N\,s/m^2$ تم ضخه خلال أنبوبة قطرها $4cm$ بمعّدل تدفق $0.004m^3/s$. أحسب مقدار النقص في ضغط الجلسرين على مسافة $100m$. الإجابة: $9492\,\mathrm{kPa}$.

16- يتدفق الماء خلال أنبوبة قطرها $20cm$ بمعدل تدفق $0.05m^3/s$. أحسب رأس الفقد في ارتفاع الماء في الأنبوبة على مسافة $1km$ من الأنبوبة بفرض أن $f = 0.019$.

الإجابة: $12.2m$.

17- في الشكلين الموضحين أدناه، يُضخ الماء من خزان بواسطة طلمبة في الشكل (**a**).



(a) (b)

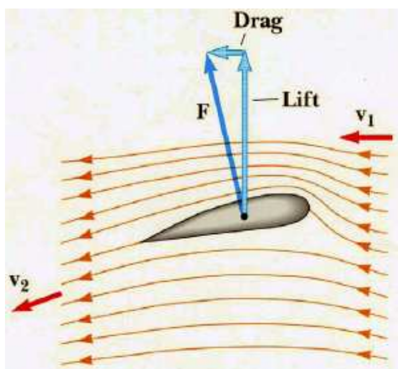
إذا كان رأس الفقد يُعطى بالعلاقة $1.2\dfrac{\mathrm{v}^2}{2g}$ حيث v السرعة المتوسطة في الأنبوبة. إذا كانت العلاقة بين معدل التدفق ورأس الفقد هي $h_p = 20 - 2000Q^2$ ، كما في الشكل (**b**). أحسب معدل التدفق Q. الإجابة: $0.052\,m^3/s$

قوة السحب والرفع (Drag and Lift)

عندما يغمر جسم في مائع متحرك فإن الجسم يتأثر بقوة الضغط وقوة السحب (**Drag**). يُعرف مجموع القوى التي تؤثر عموديا على اتجاه السريان بقوى الرفع (**Lift**). ويُعرف مجموع القوى التي تؤثر في اتجاه موازي لاتجاه السريان بقوة السحب. يمكن أن تؤثر أيضا قوة الوزن والطفو على الجسم ولكن تنحصر قوى الرفع والسحب بطبيعة الحال على تلك القوى التي تتولد بواسطة التأثير الديناميكي للمائع المتدفق. ويمكن صياغة قوى السحب والرفع بدلالة قوى إجهاد القص (**Shear Stress**) والضغط (**Pressure**).

إذا أخذنا القوى المؤثرة على جناح طائرة لوجدنا أن مجموعة القوى المؤثرة عموديا على السطح هي القوى العمودية على وحدة المساحة، أي قوى الضغط. ولأن سرعة المائع (v_1) أعلى الجناح أكبر من سرعة السريان الحر (v_0)، يكون الضغط أعلى الجناح سالب أو أقل من الضغط العادي. وتتبع

هذه النتيجة من معادلة بيرنولي مباشرة. وعليه نجد أن الضغط السالب أعلى الجناح والموجب أسفل الجناح يسهمان في قوة الرفع.



حيث F محصلة قوة السحب والرفع. نجد أن قوة الضغط تُعطى بالعلاقة

$$dF_p = PdA$$

وقوة السحب بـ

$$dF_V = \tau\, dA$$

وبتحليل هاتين القوتين في اتجاه مواز وآخر عمودي على اتجاه السريان الحر نحصل على قوة الرفع التفاضلية، على النحو التالي

$$dF_L = -PdA\sin\theta - \tau\, dA\cos\theta$$

وقوة السحب التفاضلية

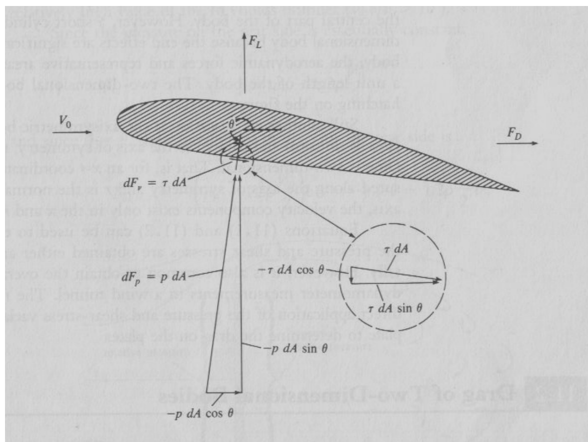
$$dF_D = -PdA\sin\theta + \tau\, dA\cos\theta$$

ويمكن أن نحصل على قوة الرفع والسحب الكليتين على الجناح بإجراء التكامل للتفاضلين أعلاه.

$$F_L = -\int (P\sin\theta + \tau\ \cos\theta)\, dA$$

و

$$F_D = \int (-P\sin\theta + \tau\cos\theta)\, dA$$



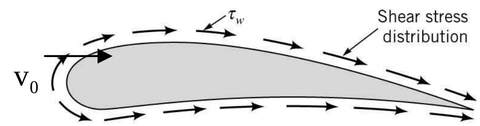
تُعطى قوة السحب بالعلاقة

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A_p \rho \mathrm{v}_0^2$$

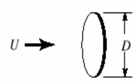
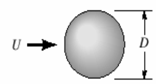
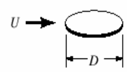
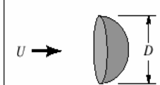
حيث C_D معامل السحب ويعتمد على عدد رينولدز و A_p مساحة الجسم المقابلة (المسقطة) و v_0 السرعة الحرة. وتُعطى قوة الرفع بالعلاقة

$$F_L = \frac{1}{2} C_L A_p \rho \mathrm{v}_0^2$$

حيث C_L معامل الرفع (**Lift Coefficient**). يوضح الشكل أدناه توزيع قوى الإجهاد، τ الواقعة على جناح طائرة.



ويوضح الجدول أدناه قيم معامل السحب للإشكال الهندسية المختلفة.

Object	(for Re $\lesssim$ 1)	Object	C_D
a. Circular disk normal to flow 	20.4/Re	c. Sphere 	24.0/Re
b. Circular disk parallel to flow 	13.6/Re	d. Hemisphere 	22.2/Re

مثال (14):

وُضع هوائي إرسال تلفزيوني على قمة أنبوبة طولها $30m$ وقطرها $30cm$ على قمة مبنى عال. ما هو قوة السحب الكلية للأنبوبة والعزم المتولد عند قاعدة الأنبوبة في تحت ظروف الضغط الجوي العادية عند درجة حرارة 20^0C وذلك بسبب حركة هواء سرعته $35m/s$؟

الحل

في هذه الظروف يكون معامل لزوجة الهواء $1.81\times10^{-5}\,N\,s/m^2$ وكثافته $1.2\,kg/m^3$. ويكون عدد رينولدز $R_e=\dfrac{v_0 d\rho}{\eta}=\dfrac{35(0.3)(1.2)}{1.81\times10^{-5}}=7\times10^5$ حيث نجد في هذه الحالة أن $C_D=0.2$. وتكون قوة السحب

$$F_D=\frac{1}{2}C_D A_p\rho v_0^2=\frac{1}{2}(0.2)(0.3\times30)(1.2)(35)^2=1323\,N$$

وبفرض أن هذه القوة تعمل على منتصف طول الأنبوبة فإن العزم المتولد هو

$$L=F_D\times\frac{L}{2}=1323\times\frac{30}{2}=19845\,N\,m$$

مثال (15):

يتحرك سائق على دراجة على أرض منبسطة. إذا كانت مساحة مقدمة الدراجة والراكب تساوي $0.18m^2$ ومعامل السحب $C_D = 0.8$ وكثافة الهواء $1.26\,kg/m^3$ وكانت أقصى قدرة عضلية يبذلها الراكب تساوي $373W$ ، أوجد أقصى سرعة للدراجة؟

الحل

تُعطى القدرة بالعلاقة

$$P = F_D \mathrm{v} = \frac{1}{2} C_D A_p \rho \mathrm{v}^3$$

ومنها تكون أقصى سرعة بالعلاقة

$$\mathrm{v} = \sqrt[3]{\frac{2P}{C_D A_p \rho}} = \sqrt[3]{\frac{2(373)}{0.8(0.18)(1.26)}} = 16\,m/s$$

مثال (16):

تتعرض مدخنة أسطوانية قطرها $1m$ وارتفاعها $25m$ لمرور تيار هواء بسرعة $14\,m/s$ في الضغط الجوي حيث معامل لزوجة الهواء $\mu = 1.78\times10^{-5}\,m^2/s$. أحسب عزم الانحناء عند قاعدة المدخنة الناتج من قوة الهواء.

الحل

يُعطى العزم بالعلاقة $L = F_D \dfrac{h}{2}$ وتُعطى قوة السحب بالعلاقة

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \mathrm{A_p} \rho \mathrm{v}^2$$

والمساحة المسقطة بالعلاقة $A_p = Dh$. يُعطى عدد رينولدز بالعلاقة

$$R = \frac{\rho \mathrm{v} D}{\eta} = \frac{1.24(14)(1)}{1.78\times10^{-5}} = 9.75\times10^5$$

ولهذا المقدار يكون $C_D = 0.35$ ، وبالتعويض نحصل على

$$L = \frac{1}{4} C_D \rho \mathrm{v}^2 \mathrm{A_p} h = \frac{1}{4}(0.35)(1.24)(14)^2(1)(25)(12.5)(25) = 130000\,Nm$$

مثال (17):

يتكون خلاط من قرصين دائريين. يعمل موتور الخلاط بسرعة دورانية $2\pi\,rad/s$. إذا كانت قوة السحب على عمود الخلاط صغيرة بحيث يمكن

تجاهلها، أحسب أقل عزم قوة وقدرة للخلاط إذا مليء بسائل كثافته $1100 kg/m^3$ وكان طول عموده $1.2m$ وسمك كل قرص يساوي $0.1m$.

الحل

تُعطى قوة السحب بالعلاقة

$$F_D = 2\left(\frac{1}{2}C_D \rho \mathrm{v}^2 \mathrm{A_p}\right) = C_D \rho \mathrm{v}^2 \mathrm{A_p}$$

و $\mathrm{v} = \omega r = (2\pi)(0.6) = 3.77\, m/s$ و $C_D = 1.17$ إذا كان $R_e > 10^3$. عدد رينولدز للوح القرص هو

$$R_e = \frac{\rho \mathrm{v} D}{\eta} = \frac{1100(3.77)(0.1)}{10^{-3}} = 4.147 \times 10^5$$

والآن نحصل على

$$F_D = C_D \rho \mathrm{v}^2 \mathrm{A_p} = 1.17(1100)(3.77)^2 (\frac{\pi}{4}(0.1)^2 = 144\, N$$

وعزم القوة

$$\tau = rF_D = (0.6)(144) = 86.4\, Nm$$

والقدرة الناتجة

$$P = \tau\omega = (86.4)(2\pi) = 543\mathrm{W}$$

مثال (18):

ضُربت كرة تنس كتلتها $57\, g$ وقطرها $0.064 m$ فتحركت بسرعة $25 m/s$. فدارت بسرعة زاوية $250\pi\, rad/s$. أوجد نصف قطر المسار الذي تتحرك فيه الكرة بسبب غزلها.

الحل

تُعطى قوة الرفع بالعلاقة

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho \mathrm{v}^2 \mathrm{A_p}$$

حيث $C_L = 0.3$ ، $A_p = \frac{\pi}{4} D^2$. بالتعويض نحصل على

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho \mathrm{v}^2 \mathrm{A_p} = \frac{1}{2}(0.3)(1.24)(25)^2 \frac{\pi}{4}(0.64)^2 = 0.371 N$$

نحصل من معادلة على القوى المؤثرة على الكرة ومنها نحصل على نصف قطر المسار

$$mg + F_L = m\frac{v^2}{r} \quad , \quad r = \frac{v^2}{g + \dfrac{F_L}{m}} = \frac{(25)^2}{9.8 + \dfrac{0.371}{0.057}} = 38.3m$$

مثال (19):

يريد رجل مظلات كتلته M الهبوط بمظلته. إذا كان معامل الرفع هو C_L، فما هي السرعة التي سيهبط بها إذا كان نصف قطر المظلة الكروية $0.75m$.

الحل:

تُعطي قوة الرفع بالعلاقة

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho v^2 A_p$$

وللهبوط بسرعة منتظمة تكون هذه القوة مساوية لقوة الوزن Mg. وبالتعويض نحصل على

$$Mg = \frac{1}{2} C_L \rho v^2 A_p$$

حيث $A = \pi R^2$ وبالتالي تصبح السرعة

$$v = \sqrt{\frac{2Mg}{C_L \rho v^2 A_p}}$$

مثال (20):

تريد طائرة مروحية (هليوكوبتر) أن ترتفع إلى أعلى. بأي سرعة يجب أن تدور مروحتها لتتمكن من الارتفاع؟

الحل

ترتبط السرعة الزاويّة بالسرعة الخطية بالعلاقة $v = \omega R$ ومنها نجد أن

$$F_L = \frac{1}{3} C_L \rho \omega^2 R^3 b$$

وبمساواتها بقوة الوزن نحصل على السرعة الزاويّة

$$\omega = \sqrt{\frac{3Mg}{C_L \rho R^3 b}}$$

التدفق القابل للانضغاط (Compressible Flow)

لقد درسنا في ما مضى تدفق الموائع باعتبار أن كثافتها ثابتة. ينطبق هذا التدفق على السوائل عموما، أما الغازات فلا تكون كثافتها ثابتة عندما يتغير الضغط. تُعرف المعادلة التي تربط كثافة المائع مع ضغطه ودرجة حرارته بمعادلة الحالة. فعندما يتغير الضغط في الموائع تنشأ موجات صوت. وتُعطى سرعة (c) هذه الموجات بالعلاقة

$$c^2 = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

ويرتبط الضغط مع الكثافة بالعلاقة $P = B\rho^k$ حيث $k = \frac{c_p}{c_V}$ و c_p و c_V السعة الحرارية عند ضغط وحجم ثابت على الترتيب و B ثابت. في حالة الغاز المثالي نجد أن $P = \rho RT$ ويكون $\gamma = \rho g = \frac{Pg}{RT}$. يمكن كتابة سرعة الصوت في الصورة

$$c = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$$

حيث $E_v = \frac{dP}{d\rho/\rho}$ هو (Bulk Modulus) معامل التمدد الحجمي ويقاس بوحدة N/m^2.

مثال (21):

أوجد سرعة الصوت في الأوساط التالية الموضحة في الجدول أدناه.

المائع	كثافة	Bulk Modulus	سرعة الصوت
الجازولين	$680\,kg/m^3$	$1.3\times10^9\ N/m^2$	$1383\,m/s$
ماء البحر	$1030\,kg/m^3$	$2.34\times10^9\ N/m^2$	$1507\,m/s$
الزئبق	$13600\,kg/m^3$	$2.85\times10^{10}\ N/m^2$	$1448\,m/s$

ينقسم الغلاف الجوي إلى طبقتين، هما التروبوسفير والأستراتوسفير. في طبقة التروبوسفير والتي تمتد من سطح البحر إلى ارتفاع $10.769\,km$ تنقص درجة الحرارة طرديا مع زيادة الارتفاع بمعدل $\alpha = 6.5\,K/km$. وتبدأ طبقة الأستراتوسفير من بعد هذه الطبقة مباشرة وتمتد إلى ارتفاع $32.3\,km$ حيث تكون درجة الحرارة ثابتة عند -55^0C. يتغير الضغط في طبقة التروبوسفير بناء على العلاقة

$$P = P_0\left[\frac{T_0 - \alpha(z - z_0)}{T_0}\right]^{g/(\alpha R)}$$

حيث T_0 درجة الحرارة عند مرجع ما.

يُعطى تغير الضغط في طبقة الأستراتوسفير بالعلاقة

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{(z - z_0)\,g}{RT}\right]$$

مثال (22):

إذا كان الضغط ودرجة الحرارة عند سطح البحر هما 101.3kPa و 15^0C على الترتيب، ما هو الضغط على ارتفاع $2\,km$؟

الحل

على هذا الارتفاع توجد طبقة التروبوسفير وبالتالي يكون الضغط

$$P = P_0\left[\frac{T_0 - \alpha(z - z_0)}{T_0}\right]^{g/(\alpha R)}$$

حيث

$z - z_0 = 2000\,m$ و $T_0 = 15 + 273 = 288\,K$ و $P_0 = 101300\,\text{Pa}$ و $g/(\alpha R) = 5.295$

وبالتعويض نجد أن $P = 79500\,\text{Pa}$.

مثال (23):

إذا تغير ضغط الهواء خلال أنبوبة من P_1 إلى P_2 عند ثبات درجة الحرارة. ما هو التغير النسبي في كثافة الهواء إذا تغير الضغط من $50\,Pa$ إلى $60\,Pa$ ؟

الحل:

يُعطى ضغط الهواء باعتباره غازا مثالي بالعلاقة

$$P = \rho R T$$

ويكون التغير النسبي في كثافته هو

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} = \frac{P_1 - P_2}{P_1} = 1 - \frac{P_2}{P_1} = 1 - \frac{50 + 101.3}{60 + 103.1} = 0.066$$

وتكون النسبة المئوية للتغير في الكثافة هي 6.6% وهي نسبة صغيرة وبالتالي يمكن اعتبار الهواء في هذه الحالة غير قابل للانضغاط (**Incompressible**).

مثال (24):

إذا كان الضغط ودرجة الحرارة على ارتفاع $10.973\,km$ من سطح البحر هما $22.6\,\text{kPa}$ و $-55^0 C$ على الترتيب، ما هو الضغط على ارتفاع $17.069\,km$؟

الحل

على هذا الارتفاع توجد طبقة الأستراتوسفير وبالتالي يكون الضغط

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{(z - z_0)\,g}{RT}\right]$$

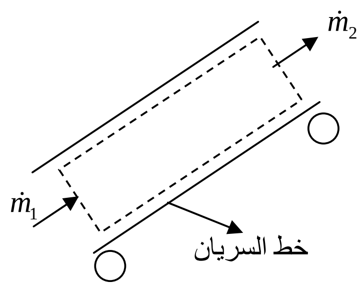
حيث $z - z_0 = 6096\,m$ و $T_0 = -55 + 273 = 393\,K$ و $P_0 = 22600\,\text{Pa}$ وبالتعويض نجد أن الضغط المطلق هو $P = 8690\,\text{Pa}$.

❖❖❖

وجد العالم النمساوي ماخ (**Mach**) وجود علاقة قوية بين نسبة سرعة الجناح (**Airfoil**)، v إلى سرعة الصوت، c ، أي $M = \frac{\text{v}}{\text{c}}$ والتي تُعرف بعدد ماخ. وتمثل هذه العلاقة النسبة بين قوى القصور إلى قوى المرونة المؤثرة على المائع. إذا كان عدد ماخ

صغيرا يكون تأثير القوى القصورية غير فعّالة في ضغط المائع، ويمكن اعتبار أن المائع غير قابل للانضغاط. إذا كانت $M < 1$ نقول بأن التدفق تحت السمعي (**Subsonic**) وإذا كانت $M > 1$ أن التدفق فوق السمعي (**Supersonic**). يمكن استخدام عدد ماخ لتحديد خصائص التدفق القابل للانضغاط. بتطبيق معادلة الطاقة عند نقطتين لتدفق انضغاطي منتظم، نجد أن

$$\dot{Q} = -\dot{m}_1\left(\frac{\mathrm{v}_1^2}{2} + gz_1 + h_1\right) + \dot{m}_2\left(\frac{\mathrm{v}_2^2}{2} + gz_2 + h_2\right)$$



يمكن تجاهل z_1 و z_2 للتدفق الغازي، وإذا كان التدفق كاظم (**Adiabtic**) فإن $\dot{Q} = 0$ وتصبح معادلة الطاقة في الصورة

$$\dot{m}_1\left(\frac{\mathrm{v}_1^2}{2} + h_1\right) = \dot{m}_2\left(\frac{\mathrm{v}_2^2}{2} + h_2\right)$$

ومن معادلة الاستمرارية $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$ وبالتالي

$$\frac{\mathrm{v}_1^2}{2} + h_1 = \frac{\mathrm{v}_2^2}{2} + h_2$$

والتي تعني أن المقدار

$$h + \frac{\mathrm{v}^2}{2} = const$$

الجدير بالذكر، أن معادلة بيرنولي لا تنطبق على المائع المنضغط.

يمكن كتابة درجة الحرارة للغاز المثالي بالعلاقة

$$T = c_p h$$

ومن المعادلة أعلاه نجد أن

$$1+\frac{\mathrm{v}^2}{2c_pT}=\frac{T_t}{T}$$

حيث $h+\frac{\mathrm{v}^2}{2}\equiv h_t$. وبم أن $c_p-c_V=R$ و $k=\frac{c_p}{c_V}$ فإن $k-1=\frac{kR}{c_p}$ ومنها نجد أن

$$c_p=\frac{k}{k-1}R$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على

$$T_t=T\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)$$

والتي تُعرف بدرجة الحرارة الساكنة (**Static Temperature**) وهي درجة الحرارة التي سيسجلها ثيرموميتر (**Thermometer**) متحرك مع المائع.

مثال (26):

تتحرك طائرة بسرعة $M=1.6$ على ارتفاع كانت فيه درجة حرارة الغلاف الجوي -55^0C. إذا كانت درجة الحرارة على سطح الطائرة هي درجة الحرارة الكلية، أحسب درجة حرارة السطح باعتبار أن $k=1.4$.

الحل

تُعطى درجة الحرارة الساكنة بالعلاقة

$$T_t=T\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)$$

وبالتعويض $T=-55=273=223K$ نجد أن

$$T_t=223\left(1+\frac{1.4-1}{2}(1.6)^2\right)=337\,K=64^0C$$

إذا كان التدفق تحت إنتروبيا ثابتة (دون انتقال للحرارة) فإن الضغط بين نقطتين، من علم الديناميكا الحرارية، يرتبط مع درجة الحرارة بالعلاقة

$$P_1=P_2\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{k/k-1}$$

وفي هذه الحالة تكون درجة الحرارة الكلية ثابتة، أي

$$T_1\left(1+\frac{k-1}{2}M_1^2\right)=T_2\left(1+\frac{k-1}{2}M_2^2\right)$$

ومنها تكون المعادلة أعلاه في الصورة

$$\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}\right)^{k/k-1}$$

نُعّرف الضغط الكلي في المائع المنضغط على الصورة

$$P_t=P\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/k-1}$$

ويختلف عن درجة الحرارة الكلية، حيث قد لا يكون ثابتا عند كل أجزاء المائع. مثل الضغط الكلي، تُعطى الكثافة الكلية للمائع المنضغط بالعلاقة

$$\rho_t=\rho\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{1/k-1}$$

حيث ρ الكثافة الساكنة أو الموضعية. إذا كان التدفق تحت إنتروبيا ثابتة فإن الكثافة الكلية تكون ثابتة في كل مناطق التدفق. نوصف أحيانا التدفق المنضغط بالركود. يعني الركود الظروف التي تتكون عند نقطة في تدفق المائع عندما تكون تنعدم السرعة. نُعرّف الضغط الحركي بالعلاقة التالية

$$q=\frac{\rho \mathrm{v}^2}{2}$$

والذي يرتبط بعدد ماخ بالعلاقة

$$q=\frac{k}{2}PM^2$$

حيث P هنا هو الضغط المطلق دائما. يُعطى ثابت الضغط بالعلاقة

$$C_p=\frac{P_t-P}{\frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2}$$

وعندما $M=0$ يكون $C_p=1$ والتي تعني أن التدفق يصبح غير قابل للانضغاط. يتغير C_p بطريقة ملحوظة عن الوحدة عندما يصبح $M=0.3$. يعني هذا أن آثار الانضغاط للتدفق تصبح غير واضحة عندما يكون عدد ماخ اقل من 0.3.

يمكن دراسة أثر التدفق المنضغط خلال أنبوبة في وجود قوة احتكاك. في حالة التدفق الكاظم تكون معادلة الاستمرارية في الصورة $\rho \mathrm{v}=\text{const.}$ ومنها نجد أن

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{d\,\mathrm{v}}{\mathrm{v}}=0$$

ومن المعادلة

$$h+\frac{\mathrm{v}^2}{2}=cont.$$

والمعادلة $h=c_pT$ للغاز المثالي نحصل على

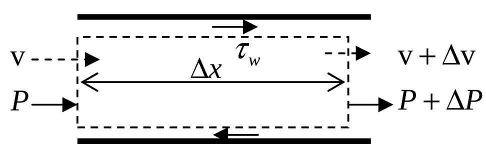
$$\frac{kRdT}{k-1}+\mathrm{v}\,d\,\mathrm{v}=0$$

وللتدفق في أنبوبة قطرها D ، حيث نجد من معادلة دارسي – ويسباخ أن إجهاد القص عند جدار الأنبوبة هو

$$\tau_w=f\,\frac{\rho\mathrm{v}^2}{8}$$

نحصل على المعادلة التفاضلية لتدفق المائع المنضغط خلال أنبوبة

$$\rho\mathrm{v}d\mathrm{v}+dP+\frac{f\,\rho\mathrm{v}^2}{2D}=0$$



مثال (27):

إذا كان معامل السحب لكرة تتحرك بعدد ماخ $M=0.7$ هو $c_D=0.95$ ، أحسب قوة السحب على الكرة في الهواء إذا كان قطرها $D=10mm$ وكان الضغط $P=101kPa$.

الحل

تُعطى قوة السحب بالعلاقة

$$F_D=\frac{1}{2}C_D\rho\mathrm{v}^2A_p$$

والضغط الحركي بالعلاقة

$$q=\frac{1}{2}PM^2=\frac{1}{2}(101\times10^3)(0.7)^2=34.6\,\mathrm{kPa}$$

ومنها نجد أن

$$F_D = C_D q A_p = 0.95(34.6\times10^3)(\frac{\pi}{4}(0.01)^2 = 2.6\,N$$

مثال (28):

أوجد سرعة الصوت في الهواء عند درجة حرارة 15^0C حيث للغاز المثالي $\frac{P}{\rho} = RT$.

الحل

تُعطى سرعة الصوت في هذا الغاز بالعلاقة $c = \sqrt{k\,RT}$، حيث $R = 278\,J/(kg\,K)$ و $k = 1.4$ للهواء وبالتالي تكون سرعة الصوت في الهواء عند درجة حرارة 15^0C والتي تُعادل $288\,K$، هي $c = 340\,m/s$.

مثال (29):

تتحرك طائرة كونكورد بسرعة $1400\,km/h$ على ارتفاع $12\,km$، حيث درجة حرارة الهواء -56^0C. أوجد عدد ماخ الذي تطير به الطائرة، ثم أوجد طبيعة تدفق الهواء.

الحل

تُعطى سرعة الصوت بالعلاقة

$$c = \sqrt{k\,RT} = \sqrt{1.4(278)(217)} = 295\,m/s$$

وسرعة الطائرة $1400\,km/s = 1400(\frac{1000}{3600}) = 389\,m/s$ وبالتالي يكون عدد ماخ $M = \frac{\text{v}}{\text{c}} = \frac{389}{295} = 1.32$ ويكون بذلك التدفق فوق السمعي (**Ultrasonic**).

مثال (30):

تتحرك طائرة بسرعة $200\,m/s$ حيث درجة حرارة الهواء $288\,K$ والضغط $P = 101.3\,kPa$. أوجد درجة الحرارة والضغط والكثافة عند مقدمة (**Nose**) الطائرة.

الحل

$$M = \frac{\text{v}}{c} = \frac{\text{v}}{\sqrt{kRT}} = \frac{200}{\sqrt{1.4(287)(288)}} = 0.588$$

ومنها تكون درجة حرارة المقدمة (الراكدة)

$$T_t = T(1+\frac{k-1}{2}M^2) = 288(1+\frac{1.4-1}{2}(0.588)^2) = 307.9\,K$$

والكثافة عند المقدمة

$$\rho_t = \rho(1+\frac{k-1}{2}M^2)^{1/k-1} = \frac{101.3(1000)}{287(288)}(1+\frac{1.4-1}{2}(0.588)^2)^{2.5} = 1.45\,kg/m^3$$

والضغط في مقدمة الطائرة

$$P_t = P(1+\frac{k-1}{2}M^2)^{k/k-1} = 101.3(10^3)(1+\frac{1.4-1}{2}(0.588)^2)^{3.5} = 128\,kPa$$

تمرين:

1- تتحرك طائرة بعدد ماخ $M = 1.5$ على ارتفاع $10\,km$ حيث درجة الحرارة -44^0C والضغط $30.5\,\text{kPa}$. أوجد:

أ- سرعة الطائرة بوحدة km/h.

ب- درجة الحرارة الكلية.

ت- الضغط الكلي.

2- تتطير طيارة بسرعة $800\,km/h$ على سطح البحر حيث درجة الحرارة 15^0C، بأي سرعة يجب أن تطير على ارتفاع فيه درجة الحرارة -40^0C وبنفس عدد ماخ؟

3- احسب فرق الضغط بين طرفي إبرة مثبتة في حقنة بلاستيكية عند دفع سائل معامل لزوجته $2\times10^{-3}\text{Pa s}$ وكثافته $1100\,kg/m^3$ بمعّدل تدفق $10^{-3}\,m^3/s$، إذا كان طول الحقنة $20\,cm$ وقطرها $0.5\,mm$. يُعطى فرق الضغط للأنبوبة المستقيمة بالعلاقة $\Delta P = f\,\dfrac{\rho \text{v}^2 L}{D}$ حيث $f = \dfrac{16}{R_e}$ للتدفق الطبقي و $f = \dfrac{0.079}{R_e^{-0.25}}$ للتدفق المضطرب. وإذا كانت الحقنة لا تتحمل ضغطا أكبر من $2\times10^4\text{Pa}$ ماذا يحدث لهذه الحقنة؟

4- أحسب عدد رينولدز وعدد فراود وعدد بوند، ثم وضّح أي القوى تكون مؤثرة لهذه المنظومة حيث $\text{v} = 1\,m/s$ و $D = 1\,cm$ و $\rho = 1\,g/cm^2$ و $\gamma = 70\,dyne/cm$ و $\eta = 10^{-2}\,N\,s/m^2$؟