الفصل الثالث

القوة وكمية الحركة الزاويّة للموائع المتحركة

Force and Angular Momentum of Moving Fluids

نهتم في هذا الفصل بالقوة التي يبديها مائع نتيجة لحركته خلال أنبوبة بها انحناءات. في بعض الأحيان يمكن أن تؤدي حركة المائع الي دوران الأنبوبة التي يمر خلالها المائع. تُعطى القوة بقانون نيوتن الثاني للحركة، $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ حيث $\vec{p} = m\vec{v}$ هي كمية حركة المائع. وبم أن $m = \int \rho\, dV$ نكتب هذه الكمية على الصورة $\vec{p} = \int \vec{v}\rho\, dV$ ومن ثم نكتب معادلة القوة التي يبديها المائع في الصورة

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_{CV} \frac{d}{dt}(\vec{v}\rho)\, dV + \int_{A} (\vec{v}\rho)\frac{dV}{dt}$$

ولكن

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{dr\, dA}{dt} = \frac{vdt\, dA}{dt} = v\, dA = \vec{v}\cdot d\vec{A}} \qquad (3.1)$$

وبالتالي يكون

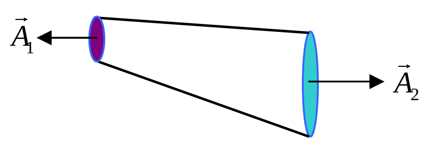
$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{CV} (\vec{v}\rho)\, dV + \int_{A} (\vec{v}\rho)\,\vec{v}\cdot d\vec{A}$$

وإذا كانت المساحة ثابتة فإن $\int \vec{v}\cdot d\vec{A} = \sum \vec{v}\cdot\vec{A} = \sum \vec{A}\cdot\vec{v}$ وبالتالي نحصل على

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{CV} \vec{v}\rho\, dV + \sum_{CS} \rho\vec{v}\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right)} \qquad (3.2)$$

حيث $\vec{A}$ متجه المساحة والذي يكون عموديا على السطح إلى الخارج (بعيداً منه). وللحالة المستقرة يكون $\int_{CV} \vec{v}\rho\, dV = const.$ وتكون القوة التي يؤثر بها المائع

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{CS} \left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right)\rho\vec{v}} \qquad (3.3)$$



حيث $\vec{A}\cdot\vec{v} = Av\cos\theta$ ، θ هي الزاوية التي يصنعها متجه المساحة مع متجه السرعة عند كل سطح. والآن نكتب

$$\sum F_x = (\vec{A}\cdot\vec{v})\rho \mathrm{v}_{1x} + (\vec{A}\cdot\vec{v})\rho \mathrm{v}_{2x}$$
$$\sum F_y = (\vec{A}\cdot\vec{v})\rho \mathrm{v}_{1y} + (\vec{A}\cdot\vec{v})\rho \mathrm{v}_{2y}$$

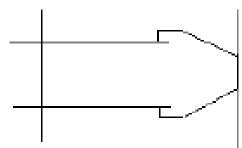
حيث $\mathrm{v}_{1x}, \mathrm{v}_{1y}, \mathrm{v}_{2x}, \mathrm{v}_{2y}$ هي مركبات السرعة الأفقية والراسية عند السطحين 1 و 2 . وتنتج القوى من تأثير الضغط والجاذبية ورد فعل الانحناءات. وبم أن معّدل التدفق $Q = (\vec{A}\cdot\vec{v})$ ، تصبح المعادلتان أعلاه في الصورة

$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_x &= Q_1\rho \mathrm{v}_{1x} + Q_2\rho \mathrm{v}_{2x}\\ \sum F_y &= Q_1\rho \mathrm{v}_{1y} + Q_2\rho \mathrm{v}_{2y}\end{aligned}} \qquad (3.4)$$

حيث $Q_1 = (\vec{A}_1\cdot\vec{v}_1)$ و $Q_2 = (\vec{A}_2\cdot\vec{v}_2)$ هما معدلين التدفق خلال السطحين 1 و 2 .

مثال (1):

أوجد مقدار القوة التي تؤثر بها فوهة أنبوبة على مائع إذا كان معّدل التدفق يساوي $0.01 m^3/s$ ، علماً بأن قطري الأنبوبة عند نهايتها هما $d_1 = 10 cm$ و $d_2 = 2.5 cm$.



الحل

من معادلة حفظ كمية الحركة $F = \rho Q(\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1)$ حيث $Q = 0.01 m^3/s$. ومن معادلة الاستمرارية $Q = A_2\mathrm{v}_2 = A_1\mathrm{v}_1$ ومنها

$$Q = \frac{\pi}{4}d_1^2\,\mathrm{v}_1 = \frac{\pi}{4}(0.1)^2\mathrm{v}_1 = 0.01 \text{ ،} \quad \mathrm{v}_1 = 1.273 m/s$$

وبالمثل نجد أن

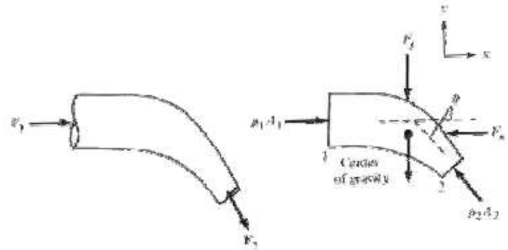
$$Q = \frac{\pi}{4}d_2^2\,\mathrm{v}_2 = \frac{\pi}{4}(0.025)^2\mathrm{v}_2 = 0.01 \text{ ،} \quad \mathrm{v}_2 = 20.37 m/s .$$

وبالتعويض في القوة أعلاه نحصل على

$$F = \rho Q(\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1) = 10^3(0.01)(20.37 - 1.273) = 190.97 N$$

مثال(2):

أوجد مقدار القوة المؤثرة على انحناء الأنبوبة الموضحة أدناه.



الحل

بتحليل القوة F نحصل علي مركبتيها الأفقية، F_x والرأسية، F_y.

$$F_x = P_2 A_2 \cos\theta - P_1 A_1 + \rho Q (\mathrm{v}_2 \cos\theta - \mathrm{v}_1)$$

و

$$F_y = P_2 A_2 \sin\theta + \rho Q \mathrm{v}_2 \sin\theta$$

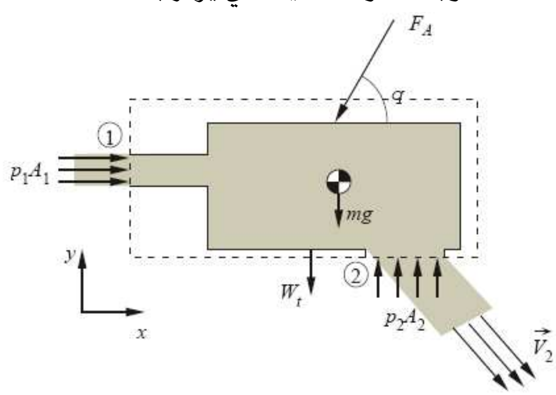
وإذا كانت الأنبوبة موضوعة راسيا يجب مراعاة وضع قوة الوزن في الاعتبار.

مثال(3):

تُعطى سرعة خروج ماء كثافته $950 kg/m^3$ خلال أنبوبة، كما موضحة بالشكل أدناه، بالعلاقة

$$\vec{\mathrm{v}}_2 = 5\,\hat{i} - 10\,\hat{j} = \mathrm{v}_{2x}\hat{i} + \mathrm{v}_{2y}\hat{j} \qquad (m/s)$$

إذا كان قطر مدخل الأنبوبة $5cm$ وقطر مخرجها يساوي $10cm$ والضغط عند المدخل يساوي $250\,\mathrm{kPa}$. أوجد القوة الأفقية التي يؤثر بها الماء.



الحل

نجـــــد مـــــن معادلـــــة الاســـــتمرارية أن $Q_1 = Q_2$ حيــــــث

$$Q_2 = A_2 v_{2y} = \frac{\pi}{4}(d_2)^2 v_{2y} = \frac{\pi}{4}(5)^2 10 = 7.854\, cm^3/s$$

و

$$Q_1 = A_1 v_{1x} = \frac{\pi}{4} d_1^2 v_{1x} = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_{2x} \;\Rightarrow\; v_{1x} = \frac{d_2^2}{d_1^2} v_{2x} = (\frac{10}{5})^2 10 = 40\, m/s$$

حيث السرعة التي يدخل بها الماء هي

$$\vec{v}_1 = v_{1x}\,\hat{i} + v_{1y}\,\hat{j}$$

مركبة القوة في اتجاه المحور السيني هي

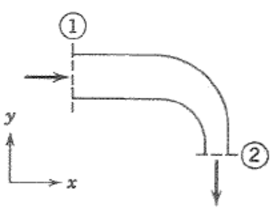
$$F_x = \rho Q (v_{2x} - v_{1x}) + P_1 A_1$$

$$F_x = 980(7.854\times10^{-2})(40-5) + 25000(\frac{\pi}{4}(0.05)^2$$

$$F_x = 2693\,N + 490 = 3183\,N$$

مثال(4):

ينساب الماء بانتظام خلال أنبوبة أفقية (كوع) بانحناء 90^0 ، كما موضحة في الشكل أدناه.



إذا كان الضغط المطلق عند مدخلها الأفقي 221 kPa حيث مساحة مقطع الأنبوبة يساوي $0.01 m^2$ ومساحة مقطعها الرأسي يساوي $0.0025 m^2$ والسرعة عندها $16 m/s$. اوجد مقدار القوة اللازمة لجعل الكوع في مكانه.

الحل

مـــــن معادلـــــة الاســـــتمرارية نجـــــد أن $A_1 v_1 = A_2 v_2$ وبالتـــــالي فـــــإن $v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \frac{0.0025}{0.01}(16) = 4\, m/s$ و $Q = A_1 v_1 = (0.01)(4) = 0.04\, m^3/s$ ومـــــن

الشكل أعلاه نلاحظ أن $P_2 = P_0 = 101.3\,\text{kPa}$. تُعطى القوة (حيث $\theta = 90^0$) الأفقية بالعلاقة

$$F_x = P_2 A_2 \cos\theta - P_1 A_1 + \rho Q(\text{v}_2 \cos\theta - \text{v}_1)$$

$$F_x = -(221 - 101.3)(10^3)(0.01) + 10^3(0.04)(-4) = -1200 - 160 = -1360\,N$$

والقوة الرأسية بالعلاقة

$$F_y = P_2 A_2 \sin\theta + \rho Q \text{v}_2 \sin\theta$$

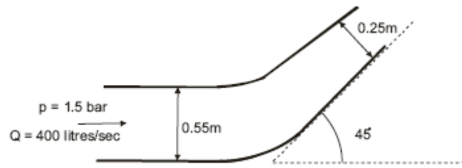
$$.F_y = 101.3(10^3)(0.0025)\sin 90 + 10^3(0.04)(16)\sin 90$$

$$F_y = 253.3 + 640 = 893.3\,N$$

ومحصلتهما هي $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ وتصنع زاوية تُعطى بـ $\tan\phi = \dfrac{F_y}{F_x}$ مع الأفقي.

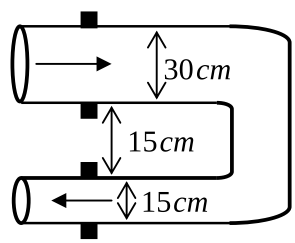
تمرين:

1- أوجد مقدار القوة المطلوبة لتثبيت الأنبوبة في الشكل أدناه في مكانها. الإجابة: $-30.6\,kN\ ,\ -12.1^0$.



2- يتدفق الماء من أنبوبة مساحة مقطعها $A = 0.0025m^2$ في حوض مفتوح، ويخرج الماء من الحوض خلال فتحة صغيرة بمعدل تدفق $0.003m^3/s$ حيث سرعة الماء $7\,m/s$. بأي معدل يتراكم الماء داخل الحوض؟ الإجابة: $0.0145m^3/s$.

3- يجري الماء في أنبوبة مثنية بزاوية 180^0، كما موضح في الشكل أدناه.



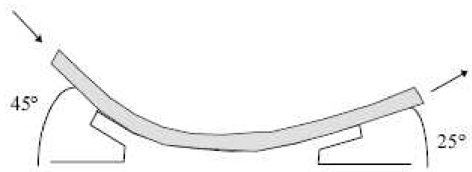
إذا كان تدفق الماء بمعدل $0.25m^3/s$ وحجم الماء يساوي $0.1m^3$ والضغط عند مدخل الأنبوبة هو $150\,\text{kPa}$. ما هو القوة اللازمة لتثبيت الانحناء في مكانه إذا كانت كتلته $500\,N$؟ الإجابة: $F_x = -16.07\,kN\,,\ F_y = 1.48\,kN$.

4- أثبت أن سرعة جريان مائع في أنبوبة مساحة مقطعها الداخلي A_1 والخارجي A_2 وارتفاع طرفها الداخلي z_1 والخارجي z_2 والضغط عند هذين الطرفين هو P_1 و P_2، تساوي

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\left[\frac{(P_1 - P_2)}{\rho g} + (z_1 - z_2)\right]}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}$$

5- يوضح الشكل أدناه أنبوبة تم تثبيتها بدعامتين في المستوى xy. إذا مر تيار ماء في شكل مستطيل طوله $75mm$ وسمكه $25mm$ داخل هذه الأنبوبة بسرعة $25m/s$، أوجد مقدار القوة واتجاهها التي يؤثر بها الماء على الأنبوبة.

الإجابة: قوة أفقية مقدارها $233.4\,N$ من اليمين إلى اليسار، ورأسية مقدارها $1324.6\,N$ إلى أسفل.



6- يُعطى توزيع سرعة مائع ينساب في أنبوبة ناعمة قطرها $0.025m$ بالعلاقة

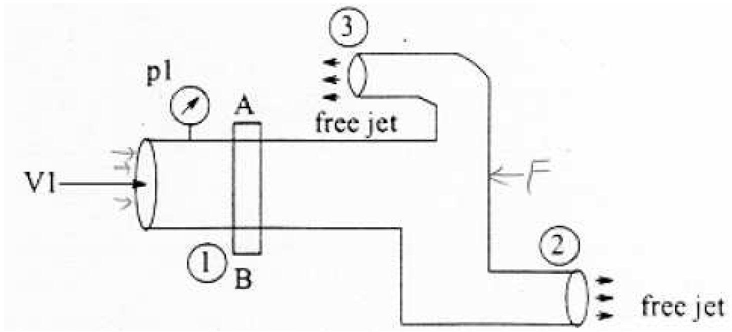
$$v = 2.5 - k\,r^2$$

حيث r نصف قطر الأنبوبة و k ثابت. إذا كان التدفق طبقيا والسرعة عند السطح صفرا ومعامل لزوجة المائع $0.00027\,\text{Pas}$، اوجد:

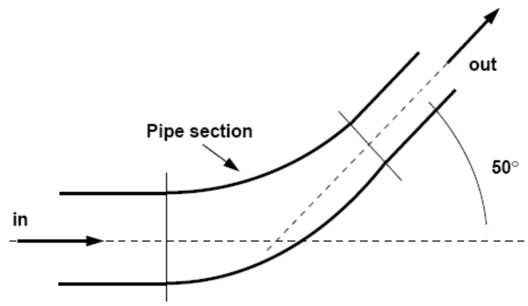
أ- معدل تدفق المائع، الإجابة: $6.14\times10^{-4}\,m^3/s$.

ب- قوة الإجهاد بين الأنبوبة والمائع عند السطح لكل وحدة طول من الأنبوبة، الإجابة: $8.49\times10^{-3}\,N$.

7- يتدفق الماء بمعدل منتظم خلال الأنبوبة الأفقية، كما في الشكل أدناه. إذا كان $P_1 = 120\,\text{kPa}$ $v_1 = 3m/s$، $D_1 = 0.5m$، $v_2 = 6m/s$، $D_2 = 0.2m$، $D_3 = 0.1m$، أوجد السرعة v_3 والقوة المؤثرة على (**Flange**) AB. الإجابة: $51m/s$ و $41071N$.



8- يتدفق ماء بمعدل $0.5m^3/s$ في أنبوبة موضوعة في المستوى xy ويخرج في اتجاه يصنع زاوية 50^0 ، كما في الشكل أدناه.



إذا كان قطر الأنبوبة الداخل إليها الماء $0.7m$ والخارج منها $0.5m$ ، أحسب مقدار واتجاه القوة التي تبديها الأنبوبة على الماء. الإجابة: $62859\,N$ و $\theta = -30.6^0$.

9- يمر هواء معامل لزوجته $10^{-5}Pa\,s$ على كرة قطرها $1m$. ما هو مقدار القوة التي تؤثر على كرة قطرها $0.1m$ تتحرك في ماء معامل لزوجته $10^{-3}Pa\,s$ بسرعة $5m/s$ ، باعتبار أن عدد رينولدز متساو في الحالتين؟ الإجابة: $1240\,N$.

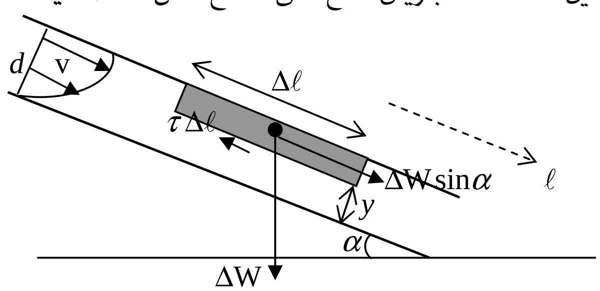
قوة المقاومة لمائع يمر على سطح منبسط

يقاوم وسط المائع الذي تتحرك فيه الأجسام، مثل الطائرات والسفن، حركة هذه الأجسام. وتُعرف هذه المقاومة بقوة السحب (**Drag**)، أو مقاومة السطح. يهتم مهندسو الطيران بمعرفة قوة السحب للطائرات والسفن وذلك لأن نجاح وفشل أدائها يعتمد على هذه القوة. فإذا كانت قوة السحب كبيرة جداً، تكون تكلفة تصنيعها باهظة وغير اقتصادية.

تنشأ قوة السحب من نوعين من القوى، هما:

(أ) قوى الضغط (**Pressure Forces**) (ب) قوى الإجهاد (**Shear Forces**)

وعموما لا يكون إجهاد القص على السطح المستوي الناعم ثابتاً. ولكي نحصل على الإجهاد الكلي نقوم بجمع هذه الإجهادات أو بإجراء التكامل لها. كما رأينا سابقا أن إجهاد القص يتناسب طرديا مع انحدار سرعة المائع المجاورة للسطح. نهتم هنا بقوة السطح الناتجة من حركة منتظمة لجريان مائع طبقي، حيث إجهاد القص وانحدار السرعة ثابتين. نأخذ هنا جريان مائع على سطح مائل، كما في الشكل أدناه.



القوى المؤثرة على حجم المائع المأخوذ في اتجاه الميلان ℓ هي: قوة الوزن $\Delta W \sin\alpha$ وقوة اللزوجة (إجهاد القص) $\tau\Delta\ell$. وعندما تكون $\sum F = 0$ فإن

$$\Delta W \sin\alpha = \tau\Delta\ell$$

ولكن إذا كان عرض هذه الطبقة من المائع الوحدة فإن حجمها هو $V = \Delta\ell(d-y)\times 1$، ووزنها $\Delta W = \Delta\ell(d-y)g$. وبالتعويض نحصل على إجهاد القص، τ

$$\tau = \gamma \sin\alpha (d-y)$$

فعند $y=d$ (سطح السائل) يكون $\tau = 0$ ، وعند $y=0$ (عند الجدار) يكون τ أكبر ما يمكن. تعني المعادلة أعلاه أن إجهاد القص يتناسب طرديا مع وزن وحدة الحجم للمائع، الذي يتناسب طرديا مع سمك طبقة وحدة المائع. وللمائع الطبقي نعلم أن

$$\tau = \eta \frac{d\mathrm{v}}{dy} = \gamma \sin\alpha (d-y)$$

ومنها نحصل على

$$\frac{d\mathrm{v}}{dy} = \frac{\gamma \sin\alpha}{\eta}(d-y)$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$\mathrm{v} = \frac{\gamma \sin\alpha}{\eta}(dy - \frac{1}{2}y^2) + C$$

حيث C ثابت. من طبيعة المسالة أعلاه، نلاحظ أن $\mathrm{v}=0$ عند $y=0$ و $y=d$ ، وبالتالي $C=0$. وتصبح الآن سرعة المائع على مسافة y من أسفل اللوح هي

$$\boxed{\mathrm{v} = \frac{\gamma \sin\alpha}{\eta}(y\,d - \frac{1}{2}y^2)} \tag{3.5}$$

نود الآن إيجاد معّدل التدفق للمائع (على وحدة العرض)، q وذلك على الصورة

$$\mathrm{q} = \int_0^d \mathrm{v\,dy} = \int_0^d \frac{\gamma \sin\alpha}{\eta}(y\,d - \frac{1}{2}y^2)\,dy$$

$$q = \frac{\gamma \sin\alpha}{\eta}(\frac{1}{2}d^2 d - \frac{1}{6}d^3)$$

$$q = \frac{1}{3}\frac{\gamma \sin\alpha}{\eta}d^3$$

ونود كذلك إيجاد متوسط السرعة والتي تُعطى بالعلاقة

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{1}{d}\int_0^d \mathrm{v\,dy} = \frac{1}{3d}\frac{\gamma \sin\alpha}{\eta}d^3$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\gamma}{3\eta}d^2 \sin\alpha$$

وبم أن $\gamma = \rho g$ و $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ نجد أن

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{g}{3\nu} d^2 \sin\alpha$$

إذا كانت α صغيرة فإن $\sin\alpha \approx \tan\alpha = S_0$ وبالتالي تصير المعادلة أعلاه

$$\boxed{\bar{\mathrm{v}} = \frac{gS_0}{3\nu} d^2} \qquad (3.6)$$

ومعّدل تدفقه لكل وحدة عرض هو

$$\boxed{q = \frac{1}{3}\frac{\gamma S_0}{\eta} d^3 = \frac{1}{3}\frac{g S_0}{\nu} d^3} \qquad (3.7)$$

مثال(5):

ينساب زيت خام معامل لزوجته $\eta = 9.3\times10^{-5}\, m^2/s$ وكثافته $920\, kg/m^3$ على لوح منبسط مائل بميلان مقداره $S_0 = 0.02$. إذا كان عمق تدفقه $0.006\, m$ ، ما هي أقصى سرعة للمائع وما هو معدل تدفقه على كل متر من عرضه. أوجد كذلك عدد رينولدز لهذا التدفق.

الحل

تُعطى سرعة المائع المنساب على لوح منبسط ومائل بالعلاقة

$$\mathrm{v} = \frac{\gamma \sin\alpha}{\eta}\left(y\, d - \frac{1}{2} y^2\right)$$

للسرعة القصوى تكون $y_{\max} = d \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mathrm{v}}{dy} = 0$ والتي تساوي

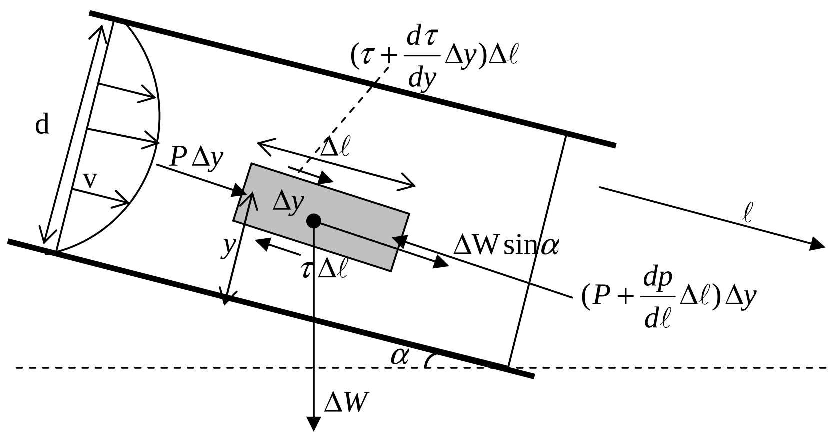
$$\mathrm{v} = \frac{(9.8)(0.02)}{9.3\times10^{-5}}\frac{(0.006)^2}{2} = 0.038\, m/s$$

ويكون معّدل تدفق المائع لكل متر من عرضه هو

$$q = \frac{1}{3}\frac{\gamma S_0}{\eta} d^3 = \frac{1}{3}\frac{gS_0}{\nu} d^3 = \frac{1}{3}\frac{(9.8)(0.002)}{9.3\times10^{-5}}(0.006)^3 = 1.52\times10^{-4}\, m^2/s$$

قوة المقاومة وانــحدار الضغط لمائع يمر بين لوحين متوازيين

يمر هنا المائع بين لوحين متوازيين، كما موضّح في الشكل أدناه. توجد هنا قوة مقاومة بين المائع واللوحين ويتغير الضغط في خلال المسافة بين اللوحين. وعند الحالة المستقرة يكون $\sum F = 0$. نأخذ هنا أيضا أن اللوحين يميلان على الأفقي بزاوية α . إذا أخذنا عنصر حجم من المائع ثم أوجدنا القوى المؤثرة عليه نحصل على انحدار الضغط وإجهاد القص.



نجد أن القوى المؤثرة على عنصر الحجم في اتجاه الميلان ℓ هي:

أ- قوة الوزن $\Delta W \sin\alpha$ ب- قوة الضغط عند الطرفين $P\Delta y$ و $(P+\frac{dP}{d\ell}\Delta)\Delta y$.

جـ إجهادي القص أعلى وأسفل العنصر $\tau\,\Delta\ell$ و $(\tau+\frac{d\tau}{dy}\Delta y)\Delta\ell$.

عند الاتزان (الحالة المستقرة) تكون محصلة هذه القوى في اتجاه الميلان صفرا. نجد أن

$$\Delta W = mg = \rho V g = \rho(\Delta\ell\,\Delta y \times 1)g = \gamma\,\Delta\ell\,\Delta y$$

و

$$\sin\alpha = -\frac{dz}{d\ell}$$

من المعادلة $\sum F_\ell = 0$ نجد أن

$$(\tau+\frac{d\tau}{dy}\Delta y)\,\Delta\ell - \tau\,\Delta\ell - (P+\frac{dP}{d\ell}\Delta\ell)\Delta y + P\Delta y + \Delta W \sin\alpha = 0$$

ومنها نحصل على

$$\frac{d\tau}{dy}\Delta y\,\Delta\ell - \frac{dP}{d\ell}\Delta\ell\Delta y + \Delta W\sin\alpha = 0$$

أو

$$\frac{d\tau}{dy}\Delta y\,\Delta\ell - \frac{dP}{d\ell}\Delta\ell\Delta y + \gamma\Delta\ell\,\Delta y\,\sin\alpha = 0$$

التي يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d\tau}{dy} - \frac{dP}{d\ell} - \gamma\frac{dz}{d\ell} = 0$$

أو

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{d\ell}(P + \gamma z)$$

وبوضع $h = \frac{P}{\gamma} + z$ نحصل على المعادلة

$$\frac{d\tau}{dy} = \gamma\frac{dh}{d\ell}$$

ومنها يمكن أن نحصل على انحدار الضغط $\frac{dP}{d\ell}$. نلاحظ أن المعادلة أعلاه تربط بين تغير إجهاد القص وانحدار الضغط. وإذا كان إجهاد القص $\tau = \eta\frac{d\mathrm{v}}{dy}$ منتظما ، فإن المعادلة أعلاه تصبح

$$\frac{d}{dy}(\eta\frac{d\mathrm{v}}{dy}) = \eta\frac{d^2\mathrm{v}}{dy^2} = \gamma\frac{dh}{d\ell}$$

أو

$$\frac{d^2\mathrm{v}}{dy^2} = \frac{\gamma}{\eta}\frac{dh}{d\ell}$$

وبإجراء التكامل للطرفين نحصل على سرعة المائع بين اللوحين المتوازيين

$$\mathrm{v} = \frac{\gamma}{\eta}\frac{dh}{d\ell}y^2 + C_1 y + C_2$$

حيث C_1 , C_2 ثابتان. وبتعويض $\mathrm{v} = 0$ عند $y = d, y = 0$ نحصل على

$$C_1 = -\frac{\gamma}{\eta}\frac{dh}{d\ell}\frac{d}{2}\ ,\ C_2 = 0$$

وتكون السرعة

$$\boxed{\mathrm{v} = -\frac{\gamma}{2\eta}(y\,d - y^2)\frac{dh}{d\ell}} \tag{3.8}$$

حيث d المسافة بين اللوحين و $h = \frac{P}{\gamma} + z$.

لقد وجدنا أن توزيع سرعة المائع الذي يتحرك على لوح منبسط مفتوح من أعلى عبارة عن قطع مكافئ، وأن أكبر سرعة للمائع تكون عند $y = d$. لإيجاد السرعة المتوسطة للمائع نستخدم العلاقة

$$\boxed{\bar{\mathrm{v}} = \frac{1}{d}\int_0^{\mathrm{d}} \mathrm{v}\,\mathrm{dy} = -\frac{\gamma}{12\eta}\frac{dh}{d\ell}d^2} \tag{3.9}$$

ولأكبر سرعة تكون $y_{max} = \frac{d}{2} \;\Leftarrow\; \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{d}y} = 0$ ونحصل على

$$\boxed{\mathrm{v}_{max} = -\frac{\gamma d^2}{8\eta}\left(\frac{dh}{d\ell}\right)} \tag{3.10}$$

وبقسمة السرعتين نجد أن السرعة المتوسطة تعادل ثلثي أكبر سرعة، $\bar{\mathrm{v}} = \frac{2}{3}\mathrm{v}_{max}$ ، وهي نفس العلاقة للمائع المتحرك علي لوح منبسط مفتوح من أعلى. نجد هنا أن أكبر سرعة تكون عند منتصف المسافة بين اللوحين. نجد أن معّدل التدفق للمائع هو

$$\boxed{\mathrm{q} = \int_0^{\mathrm{d}} \mathrm{v}\,dy = -\int_0^{d}\frac{\gamma}{2\eta}\frac{dh}{d\ell}(yd - y^2)dy = -\frac{\gamma d^3}{12\eta}\left(\frac{dh}{d\ell}\right)} \tag{3.11}$$

ومن المعادلة (**3.10**) نحصل على العلاقة

$$\boxed{\mathrm{q} = \frac{2}{3}\mathrm{v}_{max}\mathrm{d}} \tag{3.12}$$

أو

$$\mathrm{v}_{max} = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{q}}{d}$$

ومنها يكون

$$\frac{3}{2}\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{d}} = -\frac{\gamma}{2\eta}\frac{dh}{d\ell}\frac{1}{4}d^2$$

أو

$$\boxed{\frac{dh}{d\ell} = -\frac{12\eta}{\gamma d^3} q} \quad (3.13)$$

وبالتعويض عن $h = \frac{P}{\gamma} + z$ ، نحصل على انحدار الضغط $\frac{dP}{d\ell}$.

مثال (6):

يتدفق زيت كثافته $800\,kg/m^3$ ومعامل لزوجته $2\times10^{-2}\ Ns/m^2$ إلى أسفل بين لوحين متوازيين المسافة بينهما $0.01m$. إذا كان معّدل التدفق للزيت يساوي $0.01m^3/s$ لكل وحدة عرض من الزيت، أوجد:

(أ) عدد رينولدز

(ب) أقصى سرعة يتحرك بها الزيت

(جـ) السرعة المتوسطة

(د) انحدار ضغط الزيت.

الحل

(أ) يُعطى عدد رينولدز بالعلاقة $R_e = \frac{\mathrm{v}d}{\eta} = \frac{q\rho}{\eta} = \frac{(0.01)(800)}{2\times10^{-2}} = 400$. ويعني هذا أن حركة جريان الزيت هي حركة طبقية، وبالتالي يمكن استخدام المعادلة أعلاه.

(ب) تُعطى السرعة القصوى بالعلاقة

$$\mathrm{v}_{\max} = \frac{3}{2}\frac{q}{d} = \frac{3}{2}\frac{0.01}{0.01} = 1.5\,m/s$$

(جـ) تُعطى السرعة المتوسطة بالعلاقة $\bar{\mathrm{v}} = \frac{2}{3}\mathrm{v}_{\max}$ وبالتعويض نحصل على $\bar{\mathrm{v}} = \frac{2}{3}(1.5) = 1m/s$.

(د) بالتعويض نحصل على

$$\mathrm{v}_{\max} = -\frac{\gamma d^2}{8\eta}\left(\frac{dh}{d\ell}\right) = -\frac{(800)(9.8)(0.01)^2}{12\times10^{-2}}\left(\frac{dh}{d\ell}\right) = -4.905\left(\frac{dh}{d\ell}\right)$$

ومنها نجد أن $1.5 = -4.905\frac{dh}{d\ell} \ \Rightarrow\ \frac{dh}{d\ell} = -0.306$. وبما أن الحركة إلى أسفل فإن $\frac{dz}{d\ell} = -1$ ويكون انحدار الضغط

$$\frac{dh}{d\ell}=\gamma(1-0.306)=9.8\times 800(1-0.306)=5447\,N/m^3$$

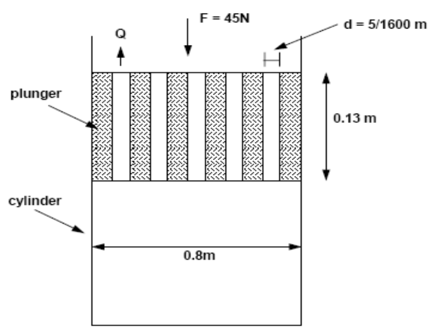
ويعني هذا أن الضغط يزيد إلى أسفل بمعدل $5.447\,N/m^2$ لكل متر من طول اللوح.

تمرين:

1- ينزلق مكعب طول ضلعه $30cm$ ووزنه $100N$ أسفل مستوى مائل بزاوية 10^0 فوق طبقة رقيقة من الزيت سمكها $0.1mm$. أوجد سرعته النهائية إذا كان معامل لزوجة الزيت يساوي $10^{-2}\ Ns/m^2$.

2- لوح $1m\times1m$ يزن $13N$ بسرعة $12cm/s$ أسفل مستوى مائل بزاوية 5^0. إذا كان اللوح يفصله عن السطح غشاء من الزيت سمكه $0.5mm$. أوجد معامل اللزوجة للزيت.

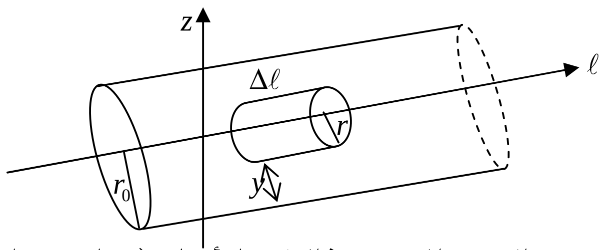
3- حقنة (**Plunger**) قطرها $0.08m$ وطولها $0.13m$ بها أربعة ثُقوب صغيرة قطر كل منها $5/1600m$ موجودة في اتجاه طولها، انظر الشكل أدناه. إذا كانت الحقنة مثبتة بإحكام داخل اسطوانة تحتوي على زيت بحيث لا يمر هذا الزيت بين الحقنة والاسطوانة. إذا تعرضت هذه الحقنة إلى أسفل مقدارها $45N$ بما في ذلك وزنها وبفرض أن التدفق إلى أعلى خلال الثقوب الأربعة طبقيا، أحسب معدل التدفق وسرعة نزول الحقنة علما بأن معامل اللزوجة للزيت $\eta = 0.2\,\mathrm{Pas}$. الإجابة: $3.24\times10^{-6}\ m^3/s$ ، $0.00064m/s$.



4- مستخدما عدد رينولدز لتفسير اختبار تدفق ماء وهواء في الأنابيب. يجري ماء بسرعة $1.6m/s$ في أنبوبة قطرها $2cm$. أوجد عدد رينولدز والسرعة اللازمة لإعطاء نفس هذه السرعة عندما يمر هواء في نفس الأنبوبة. أوجد النسبة بين نقصان الضغط على طول الأنبوبة في الحالتين، علما بأن لزوجة الماء $1.31\times10^{-6}\ m^2/s$ وكثافته $10^3\ kg/m^3$ وكثافة الهواء $1.19kg/m^3$ ومعامل لزوجته $15.1\times10^{-6}\ m^2/s$. الإجابة: $24427,\ 18.4m/s\ ,\ 0.157$.

قوة المقاومة وانــحدار الضغط لمائع يمر خلال أنبوبة أسطوانية

نجد في الواقع أن معظم الموائع تجري في أنابيب اسطوانية أكثر من جريانها بين لوحين متوازيين وبالتالي سنهتم هنا بدراسة حركة الموائع داخل أنبوبة اسطوانية.



خذ حركة عنصر الحجم الموضح في الشكل أعلاه (عبارة عن اسطوانة صغيرة) المأخوذ من حركة المائع في الأنبوبة الأسطوانية. إذا كان r نصف قطره و $\Delta W \sin\alpha$ وزنه في اتجاه المستوى المائل (ℓ) وفرق الضغط بين طرفيه هو PA و $(P+\frac{dP}{d\ell}\Delta\ell)A$ وإجهاد القص له هو $\tau(2\pi r\,\Delta\ell)$ ، تكون عند الاتزان محصلة القوى عليه في اتجاه المستوى المائل صفرا ، أي

$$\sum F_\ell = P\,A-(P+\frac{dP}{d\ell}\Delta\ell)A-\Delta W\sin\alpha-\tau(2\pi r\,\Delta\ell)=0$$

وبتعويض $\Delta W=\gamma A\Delta\ell$ و $\sin\alpha=\frac{dz}{d\ell}$ نجد أن

$$\tau=-\frac{r}{2}\left(\frac{dP}{d\ell}+\gamma\frac{dz}{d\ell}\right)$$

أو

$$\tau=-\frac{r}{2}\left(\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)\right)$$

إذا كان التدفق منتظما فان حركة المائع تكون طبقية وبالتالي يتناسب إجهاد القص طرديا مع انحدار السرعة ، أي $\tau=\eta\frac{d\mathrm{v}}{dy}$. إذاً نجد أن

$$\tau=\eta\frac{d\mathrm{v}}{dy}=-\frac{r}{2}\left(\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)\right)$$

ومنها نحصل على

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{r}{2\eta}\left(\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)\right)$$

ولكن $\frac{dv}{dr}=-\frac{dv}{dy}$ وعليه يكون

$$-\frac{dv}{dr}=-\frac{r}{2\eta}\left(\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)\right)$$

وبإجراء التكامل نحصل على

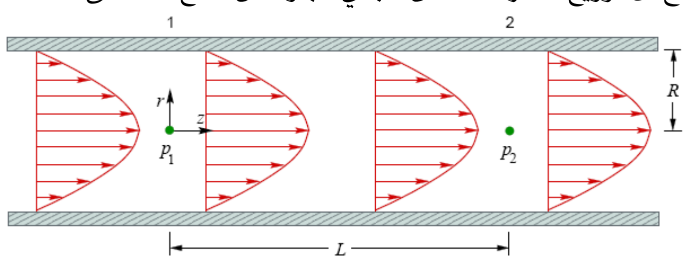
$$v=\frac{r^2}{\eta}\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)+C$$

حيث C ثابت. من الشكل أعلاه نلاحظ أن $v=0$ عند $r=r_0$ ، عند جدار الأنبوبة.

وبالتعويض نجد أن $C=-\frac{r_0^2}{4\eta}\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)$ وبالتعويض نحصل على سرعة المائع في الأنبوبة على الصورة التالية

$$\boxed{v=\left(\frac{r_0^2-r^2}{4\eta}\right)\left(-\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)\right)} \qquad (3.14)$$

والتي توضح أن توزيع السرعة لتدفق طبقي عبارة عن قطع مكافئ.



نجد أن أقصى سرعة تحدث عند مركز الاسطوانة، $r=0$. نحصل على هذه السرعة بوضع

$$\frac{dv}{dr}=0=\frac{d}{dr}\left(\frac{r_0^2-r^2}{4\eta}\right)\left(-\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)\right)=0 \;\Rightarrow r=0$$

ومنها نجد أن

$$\boxed{v_{max.}=\frac{r_0^2}{4\eta}\left(-\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)\right)} \qquad (3.15)$$

وتُعطى السرعة المتوسطة من العلاقة

$$\bar{v}=\frac{1}{A}\int_0^{r_0} v\,dA=\frac{1}{A}\int_0^{r_0}\frac{r_0^2}{4\eta}\left(-\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)2\pi r\,dr\right.$$

حيث $A=\pi r^2$ ومنها $dA=2\pi r\,dr$. نحصل على

$$\boxed{\bar{v}=\frac{r_0^2}{8\eta}\left(-\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)\right)} \quad (3.16)$$

ومن المعادلة (3.15) نجد أن

$$\boxed{\bar{v}=\frac{1}{2}v_{max}} \quad (3.17)$$

وبدلالة القطر $D=2r$ نكتب المعادلة أعلاه في الصورة

$$-\frac{d}{d\ell}(P+\gamma z)=\frac{32\eta\bar{v}}{D^2}$$

وبأخذ نقطتين على المائع نجد أن

$$P_2-P_1+\gamma(z_2-z_1)=-\frac{32\eta\bar{v}}{D^2}(\ell_2-\ell_1)$$

حيث $L=(\ell_2-\ell_1)$ هو طول الأنبوبة بين النقطتين. يمكن كتابة هذه المعادلة في الصورة

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma}+z_1=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{32\eta\bar{v}}{D^2\gamma}L} \quad (3.18)$$

وبوضع

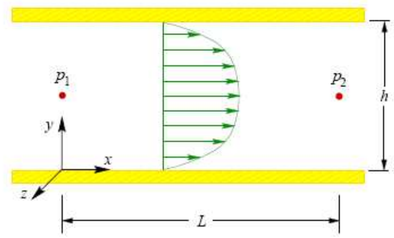
$$\boxed{h_f=\frac{32\eta\bar{v}}{D^2\gamma}L} \quad (3.19)$$

والذي يُعبّر عن رأس الفقد بسبب مقاومة الاحتكاك للأنبوبة. تُعرف هذه المعادلة بمعادلة هاجن وبوازيل (**Hagen-Poiseille**) وتنطبق على التدفق الطبقي. وللأنابيب الناعمة يُعطى رأس الفقد بالعلاقة

$$\boxed{h_f=f\,\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}} \quad (3.20)$$

حيث $f=\frac{64}{R_e}$ هو معامل المقاومة للأنبوبة. تُعرف العلاقة أعلاه بمعادلة دارسي-ويسباخ (**Darcy-Weisbach**) وتنطبق على التدفق المضطرب.

إذا كانت الأنبوبة موضوعة أفقيا، كما في الشكل أدناه فإن $z_1 = z_2$ وتصبح المعادلة أعلاه في الصورة



فإن $z_1 = z_2$ وتصبح المعادلة أعلاه في الصورة

$$\boxed{\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{32\eta\,\overline{\mathrm{v}}}{D^2}L} \tag{3.21}$$

وبدلالة معدّل التدفق $Q = A\overline{\mathrm{v}} = \frac{\pi}{4}D^2\overline{\mathrm{v}}$ نحصل على المعادلة

$$\Delta P = \frac{32\eta\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)}{D^2}L$$

ومنها نجد أن معدّل التدفق لمائع لزج خلال أنبوبة أفقية طولها L وقطرها $D = 2\pi r$ هو

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\eta L}\Delta P$$

أو بدلالة نصف القطر

$$\boxed{Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta P} \tag{3.22}$$

والتي تُعرف بمعادلة بوازيل (**Poiseuille**).

مثال (7):

يجري زيت كثافته $850\,kg/m^3$ ومعامل لزوجته $6\times10^{-4}\,m^2/s$ في أنبوبة قطرها $0.15m$ بمعّدل تدفق $0.02\,m^3/s$. ما هو رأس الفقد لطول $100m$ من الأنبوبة؟

الحل

نوجد عدد رينولدز لمعرفة تدفق الزيت (طبقي أم لا)، حيث

$$R_e = \frac{\mathrm{v}D}{\eta}$$

و

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}} = \frac{0.02}{\frac{\pi}{4}(0.15)^2} = 1.13\,m/s$$

إذاً $R_e = \frac{\mathrm{v}D}{\eta} = \frac{(1.13)(0.15)}{6\times10^{-4}} = 283$ وبالتالي يكون تدفق الزيت طبقي ومن الممكن استخدام المعادلات السابقة. يُعطى رأس الفقد لطول $100m$ بالعلاقة

$$h_f = \frac{32\eta\,\bar{\mathrm{v}}}{D^2\gamma}L = \frac{32(6\times10^{-4})(1.13)}{(0.15)^2(850\times9.8)} = 9.83\,m$$

ويكون رأس الفقد $9.83m$ لكل $100m$ من طول الأنبوبة.

مثال (8):

يسري الدم في أحد شرايين شخص مستلقي أفقيا بمعّدل تدفق $0.0002\,m^3/s$ تحت فرق ضغط مقداره $200\mathrm{kPa}$. إذا كان نصف قطر الشريان $0.015m$ ومعامل لزوجة الدم يساوي $10^{-3}\,N\,s/m^2$، ما هو طول الشريان؟

الحل

يُعطى معّدل تدفق الدم في الشريان بمعادلة بوازيل

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\left(P_1 - P_2\right)$$

وبالتعويض نحصل على

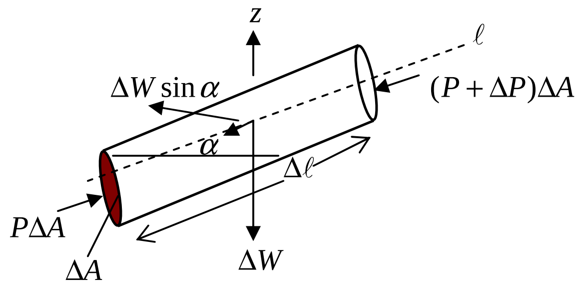
$$0.0002 = \frac{\pi(0.15)^4}{8(10^{-3})L}20(10^3)$$

ومنها يكون طول الشريان $L = \dfrac{\pi (0.015)^4}{8(10^{-3})(0.0002)} 200(10^3) = 0.1988\,m$ ، أي

. $L = 19.88\,cm$

تغير ضغط المائع بسبب قوة الوزن والتسارع

خذ عنصر حجم من مقطع أسطواني من مائع، كما موضّح في الشكل أدناه. افرض أن المائع يتسارع في اتجاه ℓ بسبب قوة الوزن والضغط. نلاحظ أن الضغط يتغير في اتجاه المحور الرأسي z والاتجاه ℓ .



كتلة الوحدة المأخوذة من المائع هي: $m = \rho V = \rho(\Delta\ell\,\Delta A)$. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على هذه الكتلة نحصل على $\sum F_\ell = ma_\ell$ ، أو $P\Delta A - (P+\Delta P)\Delta A - \Delta W \sin\alpha = \rho\,\Delta\ell\,\Delta A\, a_\ell$ ، حيث $\Delta W = mg = \rho(\Delta\ell\,\Delta A)g = \gamma\,\Delta\ell\,\Delta A$ وبالتالي فإن

$$-\frac{\Delta P}{\Delta A} - \gamma \sin\alpha = \rho\, a_\ell$$

وعندما $\Delta\ell \to 0$ يكون

$$-\frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{\partial P}{\partial \ell} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{\Delta z}{\Delta\ell} = \frac{\partial z}{\partial \ell}$$

ومنها نحصل على

$$\boxed{-\frac{\partial P}{\partial \ell} - \gamma\frac{\partial z}{\partial \ell} = -\frac{\partial}{\partial \ell}(P + \gamma z) = \rho\, a_\ell} \qquad \textbf{(3.23)}$$

والتي يمكن أن نحصل عليها من معادلة أويلر لحركة المائع مباشرة. فللمائع الساكن $a_\ell = 0$ نحصل على العلاقة المعروفة للموائع الساكنة، $P + \gamma z = const.$. يمكن تطبيق المعادلة أعلاه لمعرفة تغير الضغط عند قاع المائع موضوع في حوض حيث

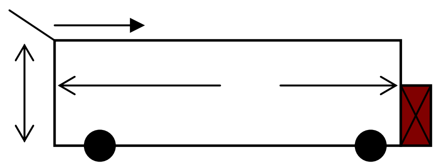
$z = cont.$. في هـذه الحالـة $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_\ell$ والـتي تعـني بـأن الـضغط يجـب أن يـنقص في اتجـاه تـسارع المـائع. وعليـه كلمـا نقـص العمـق في اتجـاه تـسارع المـائع، يجـب أن يـنقص الضغط في اتجاه قاع الحوض أيضا.

مثال (9):

تحمل سيارة صهريج مملوء بجازولين وزنه النوعي $\gamma = 6.6 kN/m^3$.

أ- إذا كان طول الصهريج $6.1m$ وكان الضغط خلف السيارة هو الـضغط الجـوي، مـا مقدار الضغط عند أعلى مقدمة السيارة عندما تتباطأ السيارة بمقدار $3.05 m/s^2$؟

ب- إذا كان ارتفاع الصهريج $1.83m$ ، فما هو أكبر ضغط في الصهريج؟



بتطبيـق معادلـة الحركـة علـى قمـة الـصهريج نـحصل علـى $\frac{dP}{d\ell} = -\rho a_\ell$ ومنهـا نجـد أن $P = -\rho a_\ell \ell + C$ حيــث C ثابــت. عنــد $P = 0$ ، $\ell = 0$ وبالتــالي يكــون $C = 0$ و $P = -\rho a_\ell \ell$.

بتعويض $a_\ell = -3.05 m/s^2$ و $\ell = 6.1m$ و $\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{6.6(1000)}{9.8} = 673 kg/m^3$ نـحصل على $P = -\rho a_\ell \ell = -(673)(-3.05)(6.1) = 12500\,\text{Pa}$.

ب- يحدث أكبر ضغط في قاع الصهريج في جهة نهاية مقدمة السيارة. وفي هـذه الحالـة نجد أن $P + \gamma z = const.$ ومنها يكون

$$P_1 + \gamma z_1 = P_2 + \gamma z_2$$

حيث 1 و 2 نقطتان عند قمة وقاع الصهريج، إذاً $z_1 = 1.83m,\ z_2 = 0$ وبالتعويض نـحصل على

$$P_2 + \gamma(0) = 12500 + 6.6(1000)(1.83) = 24600\,\text{Pa}$$

وهو أكبر ضغط موجود في الصهريج، $P_{\max} = 24.6\,\text{kPa}$.

عزم القوة وحفظ كمية الحركة الزاوية المتولدة بواسطة المائع

عند جريان المائع في الأنابيب يمكن أن يؤدي هذا الجريان إلى دوران. تنطبق على حركة المائع نفس قوانين الحركة للأجسام الجاسئة ولكن نكتب هذه القوانين بدلالة كميات تتناسب مع وصف الموائع. يُعطى عزم القوى المحصل لحركة المائع بالعلاقة

$$\sum \vec{\tau} = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

حيث $\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ هو محصلة عزم القوى (**Torque**) و $\vec{L} = \vec{r} \times (\rho V \vec{\mathrm{v}})$ هو متجه كمية الحركة الزاويّة (**Angular Momentum**) و $\vec{F}$ هي القوة الخارجية المؤثرة على المائع. إذا لم تؤثر على المائع عزوم قوى خارجية فإن كمية الحركة الزاويّة تكون محافظة.

وبالتعويض عن القوة بالتعبير السابق نحصل على

$$\sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left[\frac{d}{dt} \int_{CV} \vec{\mathrm{v}}\, \rho\, dV + \sum_{CS} \left(\vec{A} \cdot \vec{\mathrm{v}} \right) \rho \vec{\mathrm{v}} \right]$$

والتي تصبح في الصورة

$$\boxed{\sum \vec{\tau} = \frac{d}{dt} \int_{CV} (\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}})\, \rho\, dV + \sum_{CS} \left(\vec{A} \cdot \vec{\mathrm{v}} \right) \rho (\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}})} \qquad \textbf{(3.24)}$$

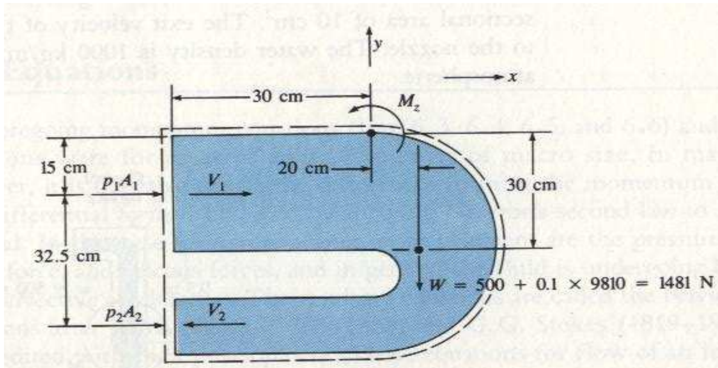
وللحالة المستقرة يكون $\int_{CV} \vec{r} \times \vec{\mathrm{v}}\, \rho\, dV = const.$ والسرعات المنتظمة يكون عزم القوى التي يؤثر بها المائع

$$\boxed{\vec{\tau} = \sum_{CS} \left(\vec{A} \cdot \vec{\mathrm{v}} \right) \rho (\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}}) = Q_1 \rho (\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}}) + Q_2 \rho (\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}})} \qquad \textbf{(3.25)}$$

وتنتج عزوم القوى من تأثير الضغط والجاذبية.

تمرين:

1- يُراد تثبيت الانحناء الموضح في الشكل أدناه بواسطة دعائم خارجية. ما هو العزم خلال محور مستوي مع قمة الأنبوبة ويبعد $30cm$ على يمين الدعامة يلزم تصميمه؟ افرض أن مركز الكتلة للانحناء و الماء مجتمعين يكون على مسافة $30cm$ أسفل قمة الأنبوبة وعلى مسافة $50cm$ يمين الدعامة. $P_1 = 150 kPa$ و $P_2 = 59.3 kPa$.



الإجابة: $-3.61kNm$.

2- يجري الدم في الوريد الرئوي الذي ينقل الدم من القلب الي الرئتين. إذا كان طول الشريان $8.5cm$ وقطره $4.8mm$ ويتحمل فرق ضغط بين طرفيه مقداره $450 Pa$، ومعامل لزوجته $2.7\times10^{-3}\ Ns/m^2$، أوجد متوسط سرعة الدم في هذا الوريد. الإجابة: $1.4m/s$.

3- إذا كان التدفق الطبيعي للدم في الدورة الدموية هو $8.3\times10^{-5}\ m^3/s$. يمر كل الدم خلال الأورطى (**Aorta**) الذي يبلغ قطره حوالي $9mm$. إذا كانت كثافة الدم $10^3\ kg/m^3$ ومعامل لزوجته $4\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$.

أ- أحسب سرعة الدم المتوسطة خلال الأورطى

ب- هل التدفق طبقي أم مضطرب؟

4- تعتمد دودة على غذائها بإمراره على غشاء مسامي سمكه $10\times10^{-6}m$ يحتوي على فتحات أسطوانية مساحة كل منها $10^{-12}m^2$ علماً بأن مساحة الغشاء $2\times10^{-3}m^2$ وأن نصف هذه المساحة عبارة عن فتحات. إذا تدفق ماء بمعّدل $1.2\times10^{-3}\,m^3/s$ خلال هذه الغشاء، أوجد فرق الضغط الكلي الناتج.

5- يُراد أخذ عينة دم من وريد حيوان بواسطة حقنة طولها $80mm$ ونصف قطرها الداخلي $0.3mm$ وكان فرق ضغط الدم بين طرفي الوريد يساوي $1.2\times10^4\,Pa$ ، ما هو الزمن اللازم لأخذ دم حجمه $5\times10^3 cm^3$ بواسطة هذه الحقنة؟ أعتبر أن معامل لزوجة الدم يساوي $4\times10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$.

6- يمر سائل لزج خلال أنبوبة أفقية. ما هي نسبة الزيادة في فرق الضغط بين طرفي الأنبوبة الناتجة عندما ينقص نصف قطر الأنبوبة بمقدار 20% لكي يبقى معّدل التدفق ثابتاً؟

7- يحتوي جسم الإنسان على حوالي 10^{10} شُعرية، ومتوسط طول كل منها يساوي $2\times10^{-3}m$ ومتوسط نصف قطرها يساوي $4\times10^{-6}m$. تعمل هذه الشُعيرات على التوازي مع بعضها البعض لتنقل الدم خلال الجسم بمعّدل تدفق يساوي $8\times10^{-5}\,m^3/s$.
أحسب فرق الضغط بين هذه الشُعيرات.

التحليل البُعدي (Dimensional Analysis)

يُستخدم علم ميكانيكا الموائع في التطبيقات الهندسية المختلفة. ومن الصعب أحيانا استنتاج القوانين الميكانيكية من التجربة لصعوبة الحصول على البيانات الكافية. في هذه الحالة نستخدم التحليل البعدي لتكوين كميات خاصة بالمائع لفهم طبيعة المائع وسلوكه. ومن هذه الكميات يمكننا استنباط علاقات رياضية تربط بين الكميات المختلفة ومن ثم الحصول على صيغ رياضية تجريبية.

نستخدم الرمز، L لوحدة الطول و T لوحدة الزمن و M لوحدة الكتلة. ويمكن كتابة كل الكميات الفيزيائية الأخرى بدلالة هذه الأبعاد الأساسية. يوضح الجدول التالي أبعاد الكميات الفيزيائية في ميكانيكا الموائع.

الكمية	الوحدة	بُعدها
السرعة	m/s	LT^{-1}
التسارع	m/s^2	LT^{-2}
القوة	$kg\,m/s^2$	MLT^{-2}
الضغط	$kg\,/m\,s^2$	$ML^{-1}T^{-2}$
الطاقة	$kg\,m^2/s^2$	ML^2T^{-2}
القدرة	$kg\,m^2/s^3$	ML^2T^{-3}
الكثافة	$kg\,/m^3$	ML^{-3}
معامل اللزوجة	$kg\,/m\,s$	$ML^{-1}T^{-1}$
معامل التوتر السطحي	$kg\,/s^2$	MT^{-2}

يجب أن تكون كل المعادلات الفيزيائية متجانسة في هذه الأبعاد بحيث تكون ابعد الطرف الأيسر هي نفس أبعاد الطرف الأيمن. فعلى سبيل المثال، المعادلة

$Q=\frac{2}{3}B\sqrt{2g}\ H^{3/2}$ حيث Q معدل تدفق و H ارتفاع و B مسافة، متجانسة الأبعاد، حيث نجد أبعاد الطرف الأيسر والأيمن متساويان.

مثال (12):

أوجد تعبير رياضي للقوة المؤثرة على مائع، إذا كانت القوة تعتمد على السرعة وطول الأنبوبة ومساحة مقطعها ومعامل لزوجة المائع.

الحل

$$F = C\,\mathrm{v}^a A^d \eta^n$$

حيث C لا بُعد له. والمطلوب هو معرفة الثوابت a, d, n. بأخذ بُعد الطرفين نحصل على

$$[F]=[C][v^a][A^d][\eta^n]$$

حيث

$$[F]=MLT^{-2}\,,[C]=1\,,\ [v^a]=(LT^{-1})^a\ ,\ [A^d]=L^{2d}\ ,[\eta^n]=(ML^{-1}T^{-1})^n$$

وبمساواة قوى الأبعاد المتشابهة نجد أن

$$MLT^{-2}=(LT^{-1})^a L^{2d}(ML^{-1}T^{-1})^n = M^n L^{a+2d-n}T^{-a-n}$$

ومنها نجد أن

$$1=n\,,$$
$$1=a+2d-n\,,$$
$$-2=-a-n$$

وبحلها نحصل على

$$n=1\,,\ a=1\,,\ d=\frac{1}{2}$$

وتكون القوة في الصورة $F = C\,\mathrm{v}\,A\eta^{1/2}$.

نظرية بكنجهام (Buckingham's Theorem)

يمكن كتابة العلاقة بين m متغير كعلاقة بين $m-n$ زمرة لا بُعد لها (تُعرف باسم مجموعة π) حيث n عدد الأبعاد الأساسية (M, L, T) المطلوبة لكتابة هذه المتغيرات. تحتوي كل من هذه المتغيرات التي لا بُعد لها على المتغيرات التي لها الأبعاد الأساسية متكررة بالإضافة إلى احد المتغيرات الأخرى.

مثال(13):

ما هي الكميات الفيزيائية التي يمكن أن تعتمد عليها قوة على مروحة طائرة؟

الحل

يمكن أن تعتمد هذه القوة على الكميات التالية: الكثافة، ρ والسرعة، v ومعامل اللزوجة، η، عدد اللفات في الثانية، N والقطر، D.

في هذه الحالة نجد أن عدد الزمر التي لا بُعد لها هو $m-n=6-3=3$ وهي: π_1, π_2, π_3. نختار المتغيرات المكررة التي لها الأبعاد الأساسية الثلاثة وهي: ρ, v, D وهي كميات يمكن قياسها وتحتوي على الأبعاد الأساسية الثلاثة. إذاً يكون

$$\pi_1 = \rho^{a_1} \mathrm{v}^{b_1} D^{c_1} F \;\;,\;\; \pi_2 = \rho^{a_2} \mathrm{v}^{b_2} D^{c_2} N \;,\; \pi_3 = \rho^{a_3} \mathrm{v}^{b_3} D^{c_3} \eta$$

بم أن

$$[\rho] = ML^{-3} \text{ و } [F] = MLT^{-2} \text{ و } [D] = L \text{ و } [\mathrm{v}] = LT^{-1} \text{ و } [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

فإن

$$[\pi_1] = [\rho^{a_1} \mathrm{v}^{b_1} D^{c_1} F] = (ML^{-3})^{a_1} (LT^{-1})^{b_1} (L)^{c_1} (MLT^{-2}) = M^0 L^0 T^0$$

أو

$$[\pi_1] = [\rho^{a_1} \mathrm{v}^{b_1} D^{c_1} F] = M^{1+a_1} L^{1-3a_1+b_1+c_1} T^{-2-b_1} = M^0 L^0 T^0$$

والتي تتحقق إذا كان

$$\begin{aligned} &1 + a_1 = 0 \\ &1 - 3a_1 + b_1 + c_1 = 0 \\ &-2 - c_1 = 0 \end{aligned}$$

نحصل على

$$a_1 = -1 , b_1 = -2 , c_1 = -2$$

ومنها تكون

$$\pi_1 = \rho^{-1}\,v^{-2} D^{-2} F$$

وبالمثل نجد أن

$$\pi_2 = \rho^{0}\,v^{-1} D^{1} N$$

و

$$\pi_3 = \rho^{-1}\,v^{-1} D^{-1} \eta$$

ومن بين الكميات التي لا بُعد لها (أعداد) ولها مدلولات فيزيائية وهي:

أ- عدد أويلر **Euler Number**: $E_n = \dfrac{P}{\rho\, v^2}$ ، ويمثل النسبة بين قوة الضغط إلى القوة القصورية.

ب- عدد فراود **Froude Number**: $F_n = \dfrac{v^2}{g\,D}$ ، ويمثل النسبة بين القوة القصورية إلى قوة الجاذبية.

ج- عدد ويبر **Weber Number**: $W_n = \dfrac{\rho\, vD}{\gamma}$ ، ويمثل النسبة بين القوة القصورية إلى قوة التوتر السطحي.

د- عدد رينولدز **Reynolds Number**: $R_e = \dfrac{\rho\, vD}{\eta}$ ، ويمثل النسبة بين القوة القصورية إلى قوة اللزوجة

هـ- عدد ماخ **Mach Number** : $M = \dfrac{v}{c}$ ، ويمثل النسبة بين السرعة الموضعية إلى سرعة الصوت.

مثال(14):

ما هي الكميات الفيزيائية التي يمكن أن يعتمد عليها معدل تدفق مائع خلال فتحة ضيقة؟

الحل

يمكن أن يعتمد هذا المعّدل على الكميات التالية:

الكثافة، ρ والضغط P ومعامل اللزوجة، η ، والقطر، D .

في هذه الحالة نجد أن عدد الزمر التي لا بُعد لها هو $m-n=5-3=2$ وهي: π_1, π_2.
نختار المتغيرات المكررة التي لها الأبعاد الأساسية الثلاثة وهي: ρ , Q , D وهي كميات يمكن قياسها وتحتوي على الأبعاد الأساسية الثلاثة. إذاً يكون

$$\pi_1 = Q^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} \eta \quad , \quad \pi_2 = Q^{a_1} D^{b_1} \rho^{c_1} P$$

بم أن

$$[Q] = L^3 T^{-1} \text{ و } [\rho] = ML^{-3} \text{ و } [D] = L \text{ و } [\mathrm{P}] = ML^{-1}T^{-2} \text{ و } [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

فإن

$$M^0 L^0 T^0 = (L^3 T^{-1})^{a_1} L^{b_1} (ML^{-3})^{c_1} ML^{-1}T^{-1} \ ,$$

$$M^0 L^0 T^0 = (L^3 T^{-1})^{a_1} L^{b_1} (ML^{-3})^{c_1} ML^{-1}T^{-2}$$

ومنها نجد أن

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + c_1 \\ 0 &= 3a_1 + b_1 - 3c_1 - 1 \\ 0 &= -a_1 - 1 \end{aligned}$$

ونحصل على

$$a_1 = -1 \ , \ b_1 = 1, \ c_1 = 1 \ ,$$

وبالتالي فإن

$$\pi_1 = Q^{-1} D^1 \eta$$

وبالمثل نجد أن

$$\pi_2 = Q^{-2} D^4 \rho^{-1} P$$