الفصل الثاني

الموائع المتحركة

Hydrodynamics

لقد درسنا في الفصل الأول ضغط الموائع الساكنة. ولاحظنا أن الضغط يعتمد على ارتفاع المائع فقط. في هذا الفصل نهتم بدراسة الموائع المتحركة وفي هذه الحالة وُجد أن الضغط يعتمد على سرعة المائع أيضا. نطبق معادلة نيوتن للحركة على حركة المائع أيضا ولكن نُعبّر عن المائع بدلالة سرعته وضغطه وكثافته ومعامل لزوجته. أما الأجسام فتوصف بالكتلة والسرعة والقوة.

معادلة حركة المائع (Equation of Motion)

تعتمد سرعة جزيئات السائل على موقع هذه الجزيئات. ويوصف المائع بخطين:

أ - خط السريان (**Streamline**) وهو عبارة عن خط يكون دائما موازيا لمتجه السرعة عند أي لحظة زمنية.

ب - خط المسار (**Pathline**) وهو المسار الحقيقي الذي تتحرك فيه جزيئات المائع.

وعليه نكتب سرعة المائع على الصورة $\mathrm{v}=\mathrm{v}(x,y,z,t)$ وبالتالي يكون تسارع المائع على الصورة

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{z}}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}\frac{dt}{dt}$$

أو على الصورة

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{v}_{\mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{v}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{v}_{\mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}$$

أو

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt}=\mathrm{v}_{\mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}+\mathrm{v}_{\mathrm{y}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}}+\mathrm{v}_{\mathrm{y}}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{z}}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}}$$

$$\frac{d\mathrm{v}}{dt}=\left(\mathrm{v}_{\mathrm{x}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}+\mathrm{v}_{\mathrm{y}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}+\mathrm{v}_{\mathrm{y}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}+\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right)\mathrm{v}$$

حيث استخدمنا خاصية مشتقة الدالة ذات متغيرات متعددة. وبما أن

$$\vec{\mathrm{v}}.\nabla=\mathrm{v}_{\mathrm{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{v}_{\mathrm{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{v}_{\mathrm{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$

تصبح المعادلة أعلاه في الصورة

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{t}}+\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}}} \qquad \textbf{(2.1)}$$

حيث

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{z}} \\ a_y &= \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{z}} \\ a_z &= \frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{z}} \end{aligned}}$$

ومنها تصبح معادلة نيوتن للمائع على الصورة

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = \rho V \frac{d\,\vec{\mathrm{v}}}{dt}$$

أو

$$\rho\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{t}} + \rho\,\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\,\vec{\mathrm{v}} = \sum \frac{\vec{F}}{V} = \sum_i \vec{f}_i \qquad (2.2)$$

تُعرف هذه المعادلة بمعادلة أويلر (**Euler**) للمائع حيث $\vec{f}_i$ هي كثافة القوى الخارجية المؤثرة على حركة المائع. وهنالك مصدران لهذه القوى:

(أ) قوى جسمية (**Body Forces**) وتعمل هذه القوى على كل أجزاء الجسم (قوة على وحدة الحجم). من أمثلة هذه القوى، قوة الجاذبية.

(ب) قوى سطحية (**Surface Forces**) تعمل على السطح، وتنشأ هذه القوة بسبب الوسط المحيط (قوة على وحدة المساحة). ومن أمثلة هذه القوى، هي قوة الضغط. ويمكننا عموما أن نحلل هذه القوى إلى مركبتين. مركبة عمودية على السطح وأخرى موازية (مماسية) للسطح.

فإذا كانت هنالك قوتان مؤثرتان على المائع هما الضغط والجاذبية فإن المعادلة السابقة تأخذ الصورة التالية

$$\boxed{\rho\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial \mathrm{t}} + \rho\,\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\,\vec{\mathrm{v}} = -\nabla P - \rho\, g\,\hat{k}} \qquad (2.3)$$

وبما أن

$$\frac{1}{2}\nabla(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}}) = (\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}} - \nabla\times(\nabla\times\vec{\mathrm{v}})$$

تصبح معادلة أويلر في الصورة، حيث $\vec{\omega} = \nabla\times\vec{\mathrm{v}} = 0$ تُعرف بالدوامة (**Vorticity**).

$$\boxed{\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{v})\right)=-\frac{1}{\rho}\nabla P-g\,\hat{k}}$$

معادلة نافيير وستوكس (Navier-Stokes Equation)

للمائع غير اللزج وغير قابل للانضغاط تكون $\nabla\cdot\vec{v}=0$ ، وبالتالي تصبح معادلة أويلر في الصورة التالية

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{P}{\rho}+g\,z\right)=0$$

وللحالة المستقرة يكون $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ وللتدفق المنتظم تكون $\vec{v}=const$ وبالتالي نحصل على المعادلة

$$\boxed{\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+g\,z=const.} \qquad (2.4)$$

والتي تُعرف بمعادلة بيرنولي. وهي معادلة تُعبر عن حفظ طاقة المائع.

تُوصف الموائع التي تكون في حالة حركة دورانية بالدوامة (**Vorticity**) والتي تُعطى بالعلاقة

$$\boxed{\omega=\nabla\times v} \qquad (2.5)$$

وبدلالة المتجهات تصبح في الصورة

$$\boxed{\omega_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)}$$

حيث ε_{ijk} يساوي الوحدة إذا كانت الدلائل (ε_{ijk}) في ترتيب دوري واحد وسالب الوحدة إذا كانت في ترتيب دوري معاكس، وصفرا إذا تساوى أي اثنين من الدلائل. يُعرف المائع غير الدوراني (**irrotational**) بأن دوامته تساوي الصفر، أي $\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}=0$

ويُعرف معدل الدوران Ω بالعلاقة $\vec{\Omega}=\frac{1}{2}\vec{\omega}$.

ويُعرف المائع غير القابل للانضغاط (**Incompressible**) بأن له $\nabla\cdot\vec{v}=0$ ، أو بدلالة المتجهات على الصورة، $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}=0$. وللمائع في الحالة المستقرة (**Steady State**) تكون له $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ حيث $\rho=const.$ وهذا يعني أن الكثافة لا تعتمد على الزمن صراحة.

إذا كان المائع لزج فإن كثافة قوة اللزوجة تصبح على الصورة $f=\eta\nabla^2 v$ وبالتعويض في معادلة أويلر أعلاه نحصل على معادلة حركة المائع والتي تُعرف بمعادلة نافيير وستوكس على الصورة

$$\boxed{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho\,\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\rho\, g\, z-\nabla P+\eta\nabla^2\vec{v}}$$

أو

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-g\, z-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\nabla^2\vec{v}} \tag{2.6}$$

حيث $\nu=\frac{\eta}{\rho}$ معامل اللزوجة الحركي (**Kinematic Viscosity**). وبدلالة المتجهات نحصل على

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-g\, x_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

وبضرب طرفي المعادلة أعلاه بـ $\nabla\times$ نحصل على دوامة المائع في حالة دوران، حيث نجد أن

$$\boxed{\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}-\nabla\times(v\times\vec{\omega})=\nu\nabla^2\vec{\omega}} \tag{2.7}$$

يمكن كتابة معادلة الدوّامة على الصورة التالية

$$\frac{D\omega}{Dt}=\vec{\omega}\cdot\nabla v+\nu\nabla^2\vec{\omega}$$

حيث

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v\cdot\nabla$$

وتعني معادلة الدوّامة أعلاه أن دوّامة المائع تتحرك مع جزيئاته وتنتشر بسبب لزوجته وتتسع (**stretched**) بسبب الحد ∇v.

نعلم من تحليل المتجهات أن

$$\nabla\times(\vec{v}\times\vec{\omega})=\vec{v}(\nabla\cdot\vec{\omega})-\vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{v})-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega}+(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v}$$

حيث $\nabla\cdot\vec{\omega}=0$ ، وللمائع غير المنضغط (**Incompressible**) تكون $\rho=const.$ ومن معادلة الاستمرارية نجد أن $\nabla\cdot\vec{v}=0$ ، وبالتالي تصبح معادلة الدوامة في الصورة التالية

$$\boxed{\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega}=(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v}+\nu\nabla^2\vec{\omega}} \tag{2.8}$$

وتصبح بدلالة المتجهات (الممتدات) في الصورة

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}=\omega_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_j^2}$$

وهي معادلة لا تعتمد على ضغط السائل. ونحصل على ضغط المائع باستخدام معادلة نافيير وستوكس (بوضع $g\,\hat{k}=0$) لنحصل على المعادلة

$$\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_i^2}\left(\frac{P}{\rho}\right)=\omega_i^2+v_j\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_i^2}{\partial x_i^2}$$

وهي معادلة بواسون (**Poisson Equation**). وفي بُعدين وعندما يكون متجه دوامة المائع عموديا على مستوى التدفق ، أي $(\vec{\omega}\times\nabla)\cdot\vec{v}=0$ تصبح معادلة الدوامة السابقة أعلاه في الصورة

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}=\nu\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_j^2}$$

نود الآن أن نكتب معادلة نافيير وستوكس (**Navier-Stokes equation**) بدلالة كميات ليس لها أبعاد وذلك على النحو التالي

$$v^*=\frac{v}{U},\quad x^*=\frac{x}{L},\ t^*=\frac{t}{L/U},\ P^*=\frac{P}{P_s} \tag{2.9}$$

$$\frac{U^2}{L}\frac{\partial\vec{v}^*}{\partial t^*}+\frac{U^2}{L}\vec{v}^*\cdot\nabla^*\vec{v}^*=-\frac{P_s}{L\rho}\nabla^*P^*+\frac{\nu U}{L^2}\nabla^{*2}\vec{v}^*$$

أو

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}^*}{\partial t^*}+\vec{v}^*\cdot\nabla^*\vec{v}^*=-\frac{P_s}{\rho U^2}\nabla^*P^*+\frac{\nu}{UL}\nabla^{*2}\vec{v}^*} \tag{2.10}$$

وبوضع $R_e=\frac{UL}{\nu}$ الذي يُعرف بعدد رينولدز و $P_s=U^2\rho$ بالضغط الحركي، تصبح المعادلة كلها بدلالة كميات لا أبعاد لها.

مثال (1):

تُعطى سرعة مائع بالعلاقة التالية

$$\vec{\mathrm{v}}=\left(\mathrm{x}^2+x-y^2\right)\hat{i}-(2xy+y)\,\hat{j}$$

أوجد تسارع المائع عند النقطة $(1,2)$. هل المائع قابل للانضغاط؟

الحل

يُعطى التسارع بالعلاقة

$$\vec{a}=\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial t}+(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v_x}\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial x}+\mathrm{v_y}\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial y}$$

حيث

$$\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial t}=0\ ,\ \mathrm{v_x}=x^2+x-y^2,\ \mathrm{v_y}=-(2xy+y)$$

ومنها نحصل على

$$\frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial x}=(2x+1)\,\hat{i}-(2y)\,\hat{j}\,,\qquad \frac{\partial\vec{\mathrm{v}}}{\partial y}=(-2y)\,\hat{i}-(2x+1)\,\hat{j}$$

وبالتالي يكون التسارع

$$\vec{a}=(x^2-y^2+x)[(2x+1)\,\hat{i}-2y\hat{j}]+(2xy+y)[-2y\,\hat{i}-(2x+1)\,\hat{j}]$$

وعند النقطة $(1,2)$ يصبح

$$\vec{a}=(1^2-2^2+1)\,(2+1)\,\hat{i}+(2\times2+2)\,(-2\times2)\,\hat{j}=-30\hat{i}-10\,\hat{j}$$

وقيمتها $a=\sqrt{900+100}=\sqrt{1000}$.

مثال (2):

تُعطى سرعة مائع يتحرك بين لوحين متوازيين بالعلاقة التالية

$$\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v}_0\left(\frac{x}{h}\right)\hat{i}+\mathrm{v}_y\,\hat{j}$$

أوجد السرعة v_y والتسارع.

الحل

من معادلة الاستمرارية $\nabla \cdot \vec{\mathrm{v}} = 0$ ، أي $\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} = 0$ وبالتعويض نحصل على

$$\frac{\partial (\mathrm{v}_0 \frac{x}{h})}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} = 0 \ , \ \frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} = 0$$

ومنها نجد أن

$$\mathrm{v}_y = -\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}} y + C$$

حيث C ثابت يعتمد فقط على x ولا يعتمد على y ، أي $C = C(x)$. يُعطى التسارع بالعلاقة

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla)\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_x \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial y}$$

حيث

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} = 0 \ , \ \mathrm{v}_x = \mathrm{v}_0 \frac{x}{h}, \ \mathrm{v}_y = -\mathrm{v}_0 \frac{\mathrm{y}}{h} + C$$

وبالتعويض نحصل على

$$\vec{a} = \left(\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}} x\right)\left(\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}}\right)\hat{i} + [\left(\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}} x\right) C' + \left(-\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}} y + C\right)\left(-\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}}\right)]\hat{j}$$

ومنها فإن

$$a_x = \left(\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}} x\right)\left(\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}}\right) \quad , \quad a_y = \left(\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}} x\right) C' + \left(-\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}} y + C\right)\left(-\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{h}}\right)$$

حيث $C' = \frac{dC}{dx}$.

مثال (3):

تُعطى سرعة مائع يتحرك في المستوى xy بالعلاقة

$$\vec{\mathrm{v}} = 2xt\ \hat{i} - 2yt\ \hat{j}$$

أوجد مقدار واتجاه السرعة والتسارع للمائع عند اللحظة $t = 1$ في النقطة $(2,2)$.

الحل

يُعطى التسارع بالعلاقة

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + (\vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla)\vec{\mathrm{v}} = \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + \mathrm{v}_x \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial y}$$

أو

$$\vec{a} = (2x\hat{i} - 2y\,\hat{j} + 2xt(2t\,\hat{i}) - 2y\,t(-2t)\,\hat{j} = (4xt^2 + 2x)\hat{i} + (4yt^2 - 2y)\,\hat{j}$$

وعند $t = 1$ و $(2,2)$ تكون السرعة

$$\vec{v} = 4\,\hat{i}\text{-}4\;\;\hat{j}$$

ومقدارها $v = \sqrt{32}$ ويصنع زاوية $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-4}{4} = 135^0$. ويكون التسارع

$$\vec{a} = 12\hat{i} - 4\,\hat{j}$$

ومقداره $a = \sqrt{160}$ ويصنع زاوية $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-4}{12} = 108.4^0$.

مثال (4):

إذا كانت سرعة مائع غير قابل للانضغاط هي

$$\vec{v} = 2x\,y\,\hat{i}\text{-}x^2 y\;\;\hat{j}$$

هل هذا التدفق حقيقي (فيزيائي)؟ وّضح ذلك؟

الحل

يحقق المائع الحقيقي معادلة الاستمرارية،والمائع غير القابل للانضغاط، المعادلة التالية

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

وبالتعويض نجد أن $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 2\,y,\; \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = -x^2$ ومنها يكون $\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$ وبالتالي لا يكون المائع حقيقي عدا عند النقاط التي يكون فيها $x = \sqrt{2y}$.

معادلة الاستمرارية (Continuity Equation)

وهي معادلة حفظ الكتلة، أي $\dfrac{dm}{dt} = 0$ وبما أن $m = \int \rho\, dV$ فإن

$$\frac{dm}{dt} = \int \frac{d\rho}{dt} dV + \int \rho \frac{dV}{dt}$$

ولكن $dV = dr\,dA$ وأن $dx = v\,dt$ وبالتالي يكون

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dr\,dA}{dt} = \frac{v dt\,dA}{dt} = v\,dA = \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

وبالتعويض نحصل على

$$\frac{dm}{dt}=\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{A}=0$$

ومن نظرية التباعد نجد لأي متجه $\overline{C}$ أن $\int \overline{\nabla}\cdot\overline{C}dV = \int \overline{C}\cdot d\overline{A}$ وبوضع $\overline{C}=\rho\overline{v}$

تصبح المعادلة أعلاه في الصورة

$$\frac{dm}{dt}=\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\int_S \nabla\cdot\rho\vec{v}\,dV=0$$

ومنها يكون

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{v}=0} \qquad (2.11)$$

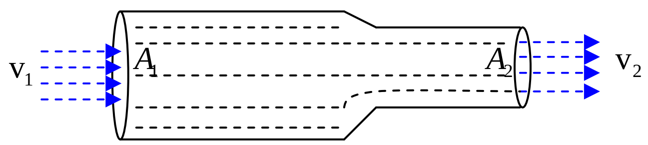
وبدلالة المتجهات تصبح في الصورة

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i)=0$$

تعني هذه المعادلة بأن المقدار (معّدل تغير الكتلة)

$$\boxed{\rho A v=\text{const.}} \qquad (2.12)$$

فإذا أخذنا حركة مائع في أنبوبة كما في الشكل أدناه، نجد أن $\rho_1 A_1 v_1=\rho_2 A_2 v_2$ هو معّدل تغير الكتلة، حيث v_1, v_2 سرعة المائع عند الطرفين و A_1, A_2 مساحتي مقطع الأنبوبتين و ρ_1, ρ_2 كثافتي المائع فيهما. ولنوع واحد من المائع $\rho_1=\rho_2$ بالتالي فإن $A_1 v_1=A_2 v_2=Q$ والذي يُعرف بمعدل التدفق، وهو عبارة عن حجم السائل الخارج (الداخل) في الثانية الواحدة، أي $Q=\frac{V}{t}$.



ومن نظرية التباعد (**Divergence Theorem**) يمكن كتابة معادلة الاستمرارية أعلاه للسرعة المنتظمة على الصورة

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\, dV+\sum_{CS}\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right)\rho=0$$

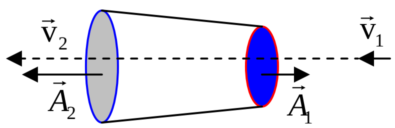
حيث CS هو السطح المحيط بالمائع، ويُعرف بسطح التحكم (**Control Surface**).

و CV هو الحجم الذي يتضمنه المائع، ويُعرف بحجم التحكم (**Control Volume**).

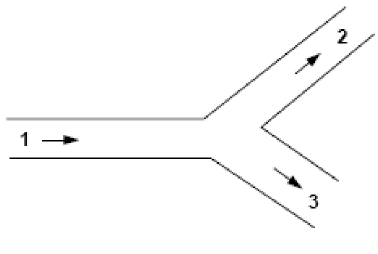
وإذا كان المائع في حالة مستقرة (**Steady State**) فإن $\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\, dV=0$ وإذا كان سرعته منتظمة يكون معدّل تغير الكتلة

$$\boxed{\sum_{CS}\dot{m}=\sum_{CS}Q\rho\equiv\sum_{CS}\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right)\rho=0} \qquad (2.13)$$

يكون معدّل التدفق، $Q=(\vec{A}\cdot\vec{v})$ ، سالبا إذا كان المائع داخل إلى السطح، وموجبا إذا كان السائل خارجا من السطح، وذلك لأن متجه المساحة عند المائع الخارج يصنع زاوية صفر مع السرعة، ويصنع زاوية 180^0 مع المائع الداخل، كما موضح في الشكل أدناه.



ونجد للشكل أدناه أن معدل التدفق الداخل خلال حجم ما يساوي معدل التدفق الخارج من ذلك الحجم.



ويعني هذا أن معدّل تغير الكتلة هو

$$-\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 + \rho_3 Q_3 = 0$$

وللسائل غير القابل للانضغاط، $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ ، نجد أن

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

مثال(5):

يمر هواء باعتباره غاز مثاليا على أنبوبة متساوية المقطع ولكن درجة الحرارة والضغط عند طرفيها غير ثابتين، حيث

$P_1 = 77\,kPa, P_2 = 45\,kPa$, $T_1 = 268\,K$, $T_2 = 240\,K$,$v_1 = 205\,m/s$. ما هي سرعة خروج الماء؟

الحل

من معادلة الاستمرارية نجد أن

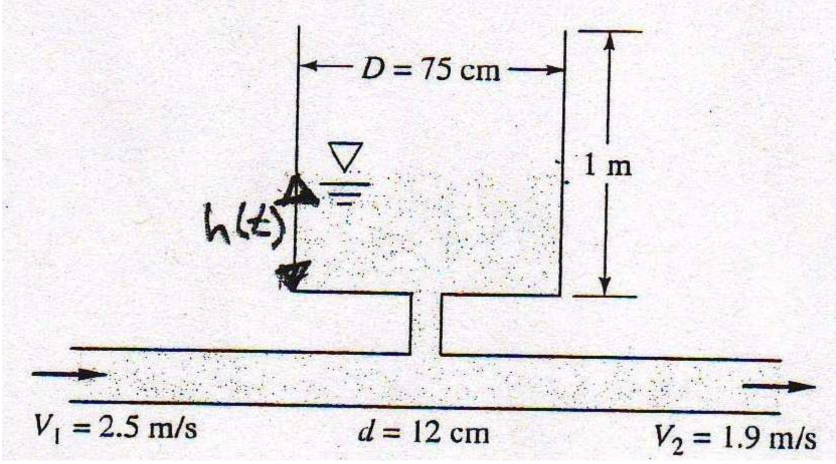
$$\rho_1 \mathrm{v}_1 A_1 = \rho_2 \mathrm{v}_2 A_2$$

ولكن $A_1 = A_2$ وبالتالي فإن $\rho_1 \mathrm{v}_1 = \rho_2 \mathrm{v}_2$ وباعتبار الهواء غاز مثاليا فإن $\rho = \dfrac{P}{RT}$

ومنها يكون $\dfrac{\mathrm{v}_2}{\mathrm{v}_1} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{P_1/T_1}{P_2/T_2} = \dfrac{77}{45}\dfrac{268}{240} \Rightarrow \mathrm{v}_2 = 314\,m/s$.

مثال (6):

يجري ماء في أنبوبة ليملأ حوضا عرضه $D = 0.75\,m$ و ارتفاعه $1m$. موصل مع الحوض بأنبوبة عند أسفل الحوض. إذا كان ارتفاع الماء داخل الحوض h ويدخل الماء في الأنبوبة السفلية بسرعة $2.5\,m/s$ ويخرج منها بسرعة $1.9\,m/s$ ، علماً بأن قطر الأنبوبة $d = 0.12\,m$ وكان ارتفاع الماء في الحوض في البدء $h_0 = 0.3\,m$. ما هو الزمن اللازم لملء الحوض؟ أنظر الشكل أدناه.



الحل

من معادلة الاستمرارية

$$\frac{d}{dt}\int_{CV}\rho\, dV-\rho_1 Q+\rho Q_2=0$$

حيث $Q_1=A_1\mathrm{v}_1=\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)\mathrm{v}_1$ و $Q_1=A_2\mathrm{v}_2=\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)\mathrm{v}_2$ و $V=\frac{\pi}{4}D^2h$ وبما أن h يتغير مع الزمن نكتب $h=h(t)$. وبالتعويض نحصل على

$$\rho\left(\frac{\pi}{4}D^2\right)\frac{dh}{dt}+\rho\left(\frac{\pi}{4}d^2\right)(\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2)=0$$

أو

$$\frac{dh}{dt}=\left(\frac{d}{D}\right)^2(\mathrm{v}_2-\mathrm{v}_1)=\left(\frac{0.75}{0.12}\right)^2(2.5-1.9)=0.0153$$

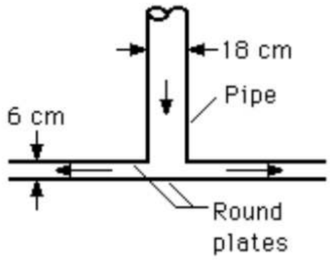
وبالتعويض عن $d,D,\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ نحصل على

$$h=0.0153t+h_0$$

حيث $h_0=0.3m$ وبالتالي فإن الزمن اللازم هو $t=\frac{h-h_0}{0.0153}=\frac{1-0.3}{0.0153}=46\sec$.

مثال(7):

يجري ماء خلال أنبوبة دائرية ثم يتفرع إلى الخارج عبر لوحين دائريين، كما في الشكل أدناه.



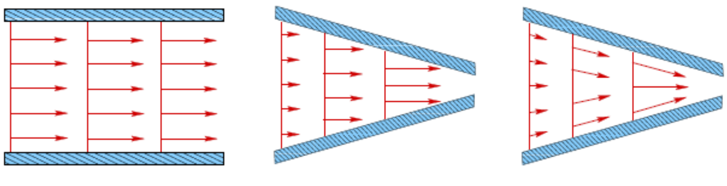
إذا كان قطر الأنبوبة $18cm$ وقطر كل من اللوحين المتفرعتين $6cm$ ، أحسب سرعة الماء المتوسطة في الأنبوبة الدائرية والسرعة المتوسطة المركزية على مسافة $0.2m$ من مركز الأنبوبة، إذا كان معدّل التدفق $0.4m^3/s$.

الحل

من معادلة الاستمرارية نجد أن سرعة الماء في الأنبوبة $v_p = \dfrac{Q}{A_p} = \dfrac{0.4}{\frac{\pi}{4}(0.18)^2} = 15.72\,m/s$ ومساحة الماء بين اللوحين على مسافة $r = 0.2m$ من المركز تساوي $A = (2\pi r)(0.06) = 2\pi(0.2)(0.06) = 0.0754\,m^2$ وتكون سرعة الماء بين اللوحين على مسافة $0.2m$ هي $v = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{0.4}{0.0754} = 5.3\,m/s$.

التدفق (Flow Rate)

يعتمد تدفق المائع على طبيعة جزيئاته. يكون التدفق منتظما (**Uniform**) -الشكل (**a**) حيث لا تتغير السرعة من موقع لآخر، إذا كانت خطوط السريان متوازية، وغير منتظم (**Non-uniform**) دون ذلك (الشكلين (**b, c**)).



(a) (b) (c)

التدفق نوعان.

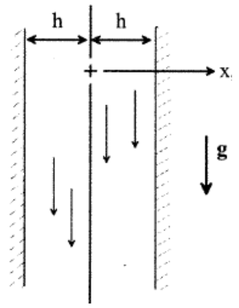
أ - التدفق الطبقي (**Laminar Flow**) وفيه تنساب جزيئات السائل في شكل طبقات. في هذه الحالة يكون عدد رينولدز $R_e < 2000$.

ب - التدفق المضطرب (**Turbulent Flow**) وفيه تكون خطوط السريان متعرجة أو دائرية. وفي هذه الحالة يكون عدد رينولدز $R_e > 4000$.

يُعرف التدفق بأنه منتظم إذا كانت السرعة لها نفس المقدار والاتجاه في كل أجزاء المائع. ويُعرف التدفق المستقر (**Steady Flow**) بأنه التدفق الذي يمكن فيه للسرعة والضغط ومساحة المقطع أن تختلف من نقطة إلى أخرى ولكن لا تتغير مع الزمن.

مثال(8):

ينساب مائع معامل لزوجته η وكثافته ρ بين لوحين متوازيين، المسافة بينهما $2h$، تحت تأثير الجاذبية إلى أسفل. إذا كان المائع يُحدد كليا بالسرعة $v_z = v_z(x)$. مستخدما معادلة نافيير وستوكس، أوجد هذه السرعة.



الحل

بأخذ المركبة الرأسية، z لمعادلة نافيير وستوكس نحصل على

$$\rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$$

وفي غياب الضغط، $P = 0$، تصير المعادلة أعلاه

$$0 = \rho g + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$$

التي تُعطي المعادلة

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\eta} g = -\frac{1}{\nu} g$$

وبإجراء التكامل مرتين نحصل على

$$v_z = -\frac{g}{2\nu} x^2 + C_1 x + C_2$$

حيث $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ ، $x = h\ ,\ \mathrm{v}_z = 0$ و $x = -h\ ,\ \mathrm{v}_z = 0$ (السرعة عند الجدران). وبالتعويض نحصل على

$$\mathrm{v}_z = -\frac{g}{2\nu}x^2 + C_1 x + C_2$$

وبتطبيق الشروط أعلاه نحصل على $C_1 = 0$ و $\mathrm{C}_2 = \dfrac{g}{2\nu}h^2$ ومنها تكون السرعة

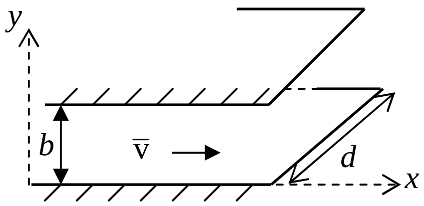
$$\mathrm{v}_z = -\frac{g}{2\nu}x^2 + \frac{gh^2}{2\nu}$$

أو

$$\mathrm{v}_z = \frac{gh^2}{2\nu}\left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)$$

مثال(9):

يتدفق مائع لزج بين لوحين متوازيين مثبتين المسافة بينهما تساوي $b = 1cm$ بسرعة متوسطة تساوي $15 cm/s$. إذا كانت كثافة المائع تساوي $920 kg/m^3$ ومعامل لزوجته $\eta = 3.827\times10^{-1}\ Ns/m^2$. اوجد أكبر سرعة في المنطقة بين اللوحين المتوازيين، باعتبار أن المائع طبقي. أوجد كذلك انحدار الضغط في اتجاه التدفق.



الحل

من معادلة نافيير وستوكس نجد للحركة في المستوى xy (حيث لا يوجد تأثير للجاذبية) أن

$$\rho \mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{x}} + \rho \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{y}} + \rho \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} + \eta \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}$$

حيث لا تتغير السرعة v_x مع المسافة x أو الزمن t صراحة وأن $\mathrm{v}_y = 0$ ، وبالتالي نحصل على

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

وبإجراء التكامل بالنسبة للمتغير y نحصل على

$$v_x=\frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)y^2+C_1 y+C_2$$

حيث C_1, C_2 ثابتان. نلاحظ أن $v_x=0$ (عند اللوحين)، أي عند $y=0,\ y=b$ وبالتالي فإن $C_1=-\frac{b}{2\eta}\frac{dP}{dx},\ \ C_2=0$ ومن ثم تصير المعادلة أعلاه

$$v_x=\frac{b^2}{2\eta}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{b}\right)$$

نحصل على السرعة المتوسطة من العلاقة

$$\bar{v}=\frac{1}{b}\int_0^b v_x dy=\int_0^b\frac{b^2}{2\eta}\left(\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y}{b}\right)dy=-\frac{b^2}{12\eta}\frac{dP}{dx}$$

ومنها نحصل على

$$\bar{v}=-\frac{b^2}{12\eta}\frac{dP}{dx}$$

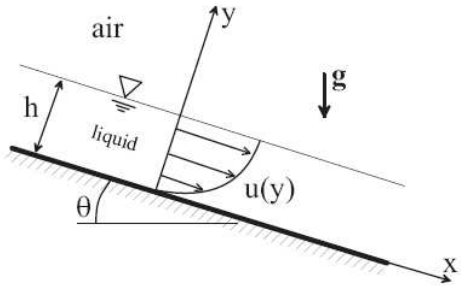
وبالتعويض عن المقادير المختلفة، نجد أن انحدار الضغط هو

$$\frac{dP}{dx}=-\frac{12\eta\bar{v}}{b^2}=\frac{12(3.827\times10^{-1})(0.15)}{(0.01)^2}=6.96\,\text{kPa}/m$$

تكون السرعة أكبر ما يمكن عند $\frac{dv}{dy}=0$، أي $y=\frac{b}{2}$ حيث نحصل على $v_{max.}=-\frac{b^2}{8\eta}\frac{dP}{dx}$ وبالمقارنة مع السرعة المتوسطة نجد أن $v_{max.}=\frac{3}{2}\bar{v}=\frac{3}{2}(0.15)=0.225\,m/s$.

مثال(10):

استخدم معادلة نافيير وستوكس لحساب سرعة ($u\equiv v_x$) مائع لزج ينساب على سطح مائل بزاوية θ، كما موضّح في الرسم أدناه لتحصل على معّدل التدفق لكل وحدة طول ℓ من z.



توجد هنا مركبة السرعة في اتجاه x ، $u \equiv \mathrm{v_x}$ والجاذبية $g_x = g\sin\theta$ ويكون الضغط في اتجاه x ثابتا، أي $P = P_0$ وتصبح المعادلة

$$\rho\,\mathrm{v_x}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \rho\,\mathrm{v_y}\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{y}} + \rho\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{t}} = \rho\, g_x + \eta(\frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial y^2})$$

ومن معادلة الاستمرارية، بوضع $\mathrm{v_y} = 0$ ، نجد أن

$$\frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{v_y}}{\partial \mathrm{y}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{v_x}}{\partial \mathrm{x}} = 0$$

والتي تعني أن $\mathrm{v_x} = f(y)$ وتصبح المعادلة أعلاه في الصورة

$$\rho\, g_x + \eta\frac{\partial^2 \mathrm{v_x}}{\partial y^2} = 0$$

أو

$$\frac{d^2 \mathrm{v_x}}{dy^2} = -\frac{\rho\, g\sin\theta}{\eta}$$

وبتكاملها نحصل على إجهاد القص

$$\frac{d\mathrm{v_x}}{dy} = -\frac{\rho\, g\sin\theta}{\eta}\, y + C_1$$

وبإجراء التكامل مرة أخرى نحصل على

$$\mathrm{v_x} = -\frac{\rho\, g\sin\theta}{2\eta}\, y^2 + C_1 y + C_2$$

حيث C_2 , C_1 ثابتان نحصل عليهما من العلاقة $\tau_x = \eta\frac{d\mathrm{v_x}}{dy} = 0$ عند $y = h$ ، و $\mathrm{v} = 0$ عند $y = 0$. بتطبيق هذه الشروط نحصل على $C_1 = -h$ و $C_2 = 0$. تصبح السرعة في اتجاه x على الصورة التالية

$$v_x = -\frac{\rho g \sin\theta h^2}{2\eta}\left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h}\right)$$

وإذا كان ℓ هو الطول في اتجاه z فإن معدّل التدفق هو

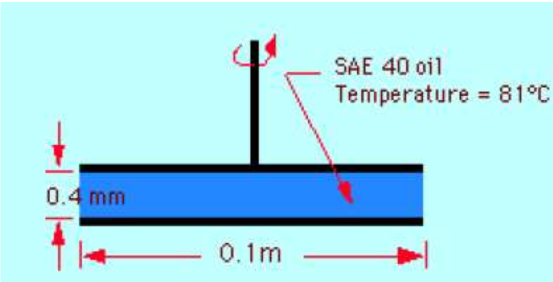
$$Q = \ell\int_0^h v_x dy = \ell\int_0^h \frac{\rho g \sin\theta h^2}{2\eta}\left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h}\right)dy$$

ونحصل على معدّل التدفق على وحدة الطول، $\frac{Q}{\ell}$ على الصورة التالية

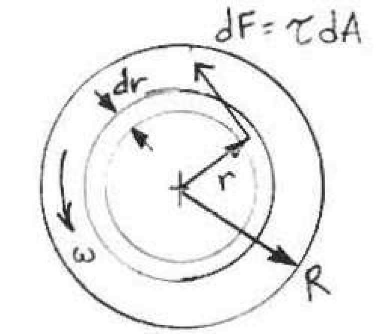
$$\frac{Q}{\ell} = \frac{\rho g h^3}{3\eta}\sin\theta$$

مثال(11):

قرصان المسافة بينهما $0.4\,mm$ وطول كل منهما $0.1\,m$ يفصل بينهما زيت معامل لزوجته $\eta = 0.02037\,N\,s/m^2$. ما مقدار العزم اللازم بذله ليدور القرص الأعلى بسرعة $50\,rpm$ عندما يكون القرص الأسفل ساكناً؟



الحل



سرعة النقطة عند القرص الأعلى تساوي $v = \omega r$ حيث $\omega = \frac{2\pi}{60}(50) = 5.236\,rad/s$. بفرض أن انحدار السرعة يتناسب طرديا مع السرعة،

أي $\frac{dv}{dy}=\frac{v}{D}=\frac{\omega r}{D}$ فإن إجهاد القص $\tau=\eta\frac{dv}{dy}=\eta\frac{\omega r}{D}$ ويكون عزم القوة، T على النحو التالي

$$T=\int_0^R r\,dF=\int_0^R r\,\tau\,dA=2\pi\int_0^R \tau\, r^2 dr=2\pi\int_0^R \eta\frac{\omega r}{D}\, r^2 dr$$

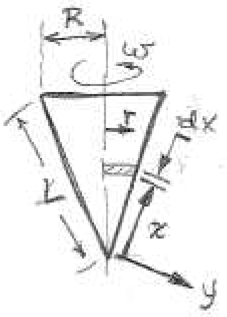
حيث $A=\pi r^2$ ، وبالتالي نجد أن

$$T=\frac{2\pi\eta\omega}{D}\int_0^R r^3 dr=\frac{\pi\eta\omega}{2D}R^4=\frac{3.14(0.02037)(5.236)(0.05)^4}{2(0.4\times10^{-3})}=2.62\times10^{-3}\,N\,m$$

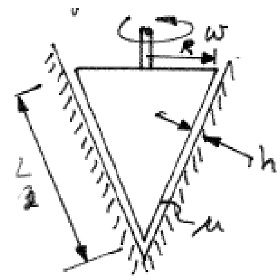
مثال(12):

يدور مائع في إناء مخروطي كما موضح في الشكل بسرعة ثابتة مقدارها $600\,rpm$. إذا ملئ الفراغ الذي سمكه $h=0.0003m$ بين المخروط وجدار الإناء بزيت معامل لزوجته $0.04\,Ns/m^2$ ، أحسب عزم القوة اللازم لدوران المخروط إذا كان نصف قطر الدوران $R=0.003m$ و $L=0.06m$.

الحل:



و



تُعطى قوة الإجهاد بالعلاقة

$$dF=\tau\,dA$$

حيث $\tau=\eta\frac{dv}{dy}$ وللسرعة الخطية نجد أن

$$\frac{dv}{dy}=\frac{\omega r}{h}$$

ويُعطى عزم القوة بالعلاقة

$$T=\int r\,dF$$

حيث نجد من الرسم أن

$$\frac{x}{r}=\frac{L}{R}$$

ومنها

$$\frac{dx}{dr}=\frac{L}{R}$$

أو

$$dx=\frac{L}{R}dr$$

وبالتعويض نجد أن

$$T=\int r\,dF=\int r\eta\frac{\omega r}{h}dA=\int \frac{\omega r^2}{h}\eta(2\pi r\,dx)$$

$$T=\int_0^L\frac{\omega r^2}{h}\eta(2\pi r\,dx)=2\pi\frac{\omega\eta}{h}\int_0^R r^3\frac{L}{R}dr=2\pi\frac{\omega\eta L}{hR}\frac{R^4}{4}$$

ومنها يكون العزم

$$T=\pi\frac{\eta\,\omega L}{2h}R^3$$

وبالتعويض نحصل على

$$T=\pi\frac{\eta\,\omega L}{2h}R^3=\frac{\pi(0.04)}{2(0.0003)}(600\frac{2\pi}{60})(0.06)(0.003)^3=2.13\times10^{-4}\ Nm$$

مثال(13):

ينقل خط أنابيب قطره $0.5m$ زيتا كثافته $708\,kg/m^3$. إذا كان الضغط عند نقطة ما $137\,\text{kPa}$ وعند نقطة أخرى تبعد عنها $1000\,m$ وتقع أسفل منها بمقدار $249\,m$ كان الضغط $154\,\text{kPa}$. أحسب مقدار اجهاد القص لتدفق الزيت عند الجدار.

الحل

تُعطى قوة الجاذبية بالعلاقة $\rho g(h_2-h_1)A$ وقوة الضغط بالعلاقة $(P_2-P_1)A$ وقوة الإجهاد بالعلاقة $\tau(\pi DL)$. وعند الاتزان نجد أن

$$\tau(\pi DL)=\rho g(h_2-h_1)A+(P_2-P_1)A$$

ومنها نجد أن

$$\tau(\pi DL) = \rho g(h_1 - h_2)\frac{\pi}{4}D^2 + (P_1 - P_2)\frac{\pi}{4}D^2$$

$$\tau = \rho g(h_1 - h_2)\frac{D}{4L} + (P_1 - P_2)\frac{D}{4L}$$

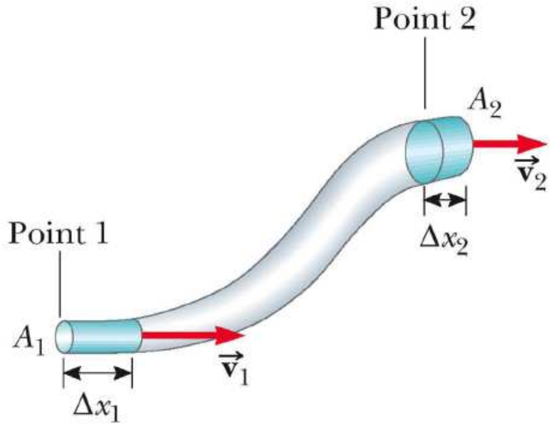
$$\tau = 708(9.8)(249)\frac{0.5}{4000} - 17(10^3)\frac{0.5}{4000} = 214\, N/m^2$$

❖❖❖

إذا أخذنا حركة كتلة من مائع حجمه V في اتجاه غير أفقي داخل مجري، فإن الشغل الكلي الذي تبذله هذه الكتلة من المائع يُتمثل في:

(أ) الشغل المبذول بواسطة فرق الضغط بين طرفي الأنبوبة، W_1.

(ب) الشغل المبذول بواسطة قوة الجاذبية، وهو عبارة عن التغير في طاقة الوضع للكتلة $W_2 = -\Delta U$ وطاقة الحركة للكتلة، $W_3 = \Delta E_k$.



الشغل الناتج بسبب الضغط هو

$$W_1 = P_1V - P_2V = (P_1 - P_2)V$$

الشغل الناتج من قوة الجاذبية هو W_2، حيث نحصل على

$$W_2 = m_2 g\, z_2 - m_1\, g\, z_1 = \rho V g\, z_2 - \rho V g\, z_1 = \rho V(z_2 - z_1)\, g$$

حيث $V_1 = V_2 = V$, $m_1 = m_2$ للمائع غير القابل للانضغاط. والشغل الناتج من التغير في طاقة الوضع هو

$$W_3 = \frac{1}{2}m\,v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\, V\, v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\, V\, v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\, V\,(v_2^2 - v_1^2)$$

ومن مبدأ حفظ الطاقة نجد أن $W_1 = W_2 + W_3$ وبالتعويض نحصل على

$$(P_1 - P_2)V = \rho \mathrm{V}(\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1) + \frac{1}{2}\rho \mathrm{V}(\mathrm{v}_2^2 - \mathrm{v}_1^2)$$

التي يمكن كتابتها على الصورة التالية

$$\boxed{P_1 + \rho \mathrm{g} \mathrm{z}_1 + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}_1^2 = P_2 + \rho \mathrm{g} \mathrm{z}_2 + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}_2^2} \qquad (2.14)$$

والـتي تعـني أن المقـدار $P + \rho \mathrm{g} \mathrm{z} + \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2 = const.$ تُعـرف هـذه المعادلـة بمعادلـة بيرنولي. ونكتب عموما هذه المعادلة في الصورة التالية

$$\boxed{\frac{P_1}{\rho \mathrm{g}} + \mathrm{z}_1 + \frac{\mathrm{v}_1^2}{2g} = \frac{P_1}{\rho \mathrm{g}} + \mathrm{z}_2 + \frac{\mathrm{v}_2^2}{2g}} \qquad (2.15)$$

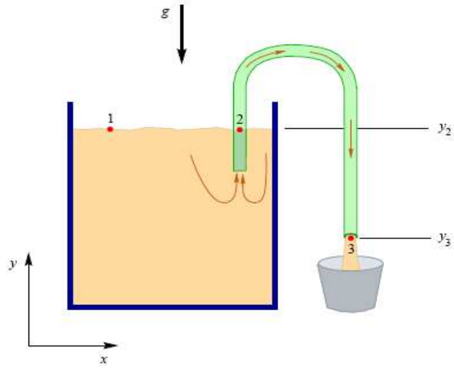
حيـث يُعـرف الحـد $\frac{P}{\rho \mathrm{g}} = \frac{P}{\gamma}$ بـرأس الضـغط (**Pressure Head**) ولـه وحـدة طـول، حيث $\gamma = \rho g$ هو الثقل النوعي، ويُعرف المقدار $\frac{\mathrm{v}^2}{2g}$ بـرأس السـرعة (**Velocity Head**) و z_1 برأس الجهد (**Potential Head**). من هذه المعادلة نلاحظ أن الضغط يكون صغيراً في المناطق التي سرعتها عالية والعكس بالعكس. إذا كـان المائع يتحرك أفقيا فإن $\mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2$ وبالتالي فإن

$$\Delta P \equiv P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{g}(\mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_2^2)$$

والذي يُعرف بالضغط الديناميكي. فإذا كنت واقفا بجوار قطار يتحـرك فإنك ستجد قوة تدفعك ناحية القطار بسبب فرق الضغط بين الهواء بعيدا عـن القطـار والمجـاور لـه. و لنفس السبب ترتفع الطائرات محلّقة في الهواء، حيث تكون سرعة الهواء أعلى الطـائرة أقل بكثير من سرعة الهواء أسفلها، وبالتـالي تتمكن الطـائرة مـن الإقـلاع بسـبب قـوة دفع الهواء.

مثال(14):

أوجد سرعة الماء عند النقطة 2 وضغطها، كما في الشكل أدناه.



الحل

بتطبيق معادلة بيرنولي للنقطتين 1 و 2 نجد أن

$$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+y_1=\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+y_2$$

وبم أن $P_1=P_0$, $v_1=0$ و $y_1=y_2$ ، نجد أن

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{P_0-P_2}{\gamma}$$

وللنقطتين 3 و 2 يكون $P_0=P_0$ وكذلك نلاحظ أن $v_2=v_3$ لأن $Q_1=Q_2$ ، نجد أن

$$\frac{P_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+y_2=\frac{P_3}{\gamma}+\frac{v_3^2}{2g}+y_3$$

ومنها نجد أن

$$\frac{P_2-P_0}{\gamma}=y_3-y_2$$

ومنها تكون سرعة النقطة 2

$$v_2=\sqrt{2g(y_2-y_3)}$$

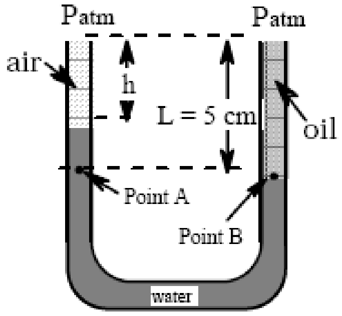
وبالتالي يكون الضغط عندها

$$P_2=P_0+\gamma(y_3-y_2)$$

مثال(15):

وضع زيت فوق ماء موضوع في أنبوبة على شكل الحرف U فأزاحت الهواء على الناحية الأخرى، كما في الشكل أدناه. أوجد ارتفاع عمود الهواء، h. وإذا مر

الهـواء علـى الأنبوبـة اليسـرى مـا هـي سـرعته، علمـا بـان كثافـة الهـواء تساوي $\rho_a = 1.29\,kg/m^3$ وكثافة الزيت $\rho_0 = 750\,kg/m^3$ ؟



الحل

الضغط متساو عند النقطتين A و B ، أي $P_A = P_B$ ، فنجد أن

$$P_A = P_0 + \rho_a gh + \rho_w g(L-h)$$

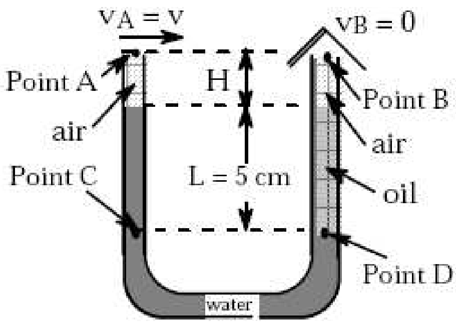
و

$$P_B = P_0 + \rho_0 gL$$

ومنهما يكون طول عمود الهواء

$$h = \frac{\rho_w - \rho_0}{\rho_w - \rho_a} L = \frac{1000-750}{1000-1.29} 5 = 1.25\,cm$$

عند مرور الهواء أعلى الأنبوبة اليسرى يتعادل مستوى المائع في الأنبوبتين



ومن معادلة بيرنولي، نجد للنقطتين A و B أن

$$P_A + \frac{1}{2}\rho_a \mathrm{v}^2 + \rho_a g y_A = P_B + \frac{1}{2}\rho_a (0)^2 + \rho_a g y_B$$

و

$$P_C = P_A + \rho_a \mathrm{g} \mathrm{H} + \rho_w gL$$

و

$$P_D = P_B + \rho_a \mathrm{g} \mathrm{H} + \rho_0 gL$$

من مبدأ باسكال نجد أن $P_C = P_D$ ، وعليه يكون

$$P_B + \rho_a \mathrm{g} \mathrm{H} + \rho_0 gL = P_A + \rho_a \mathrm{g} \mathrm{H} + \rho_w gL$$

أو

$$P_B - P_A = (\rho_w - \rho_0) gL$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على

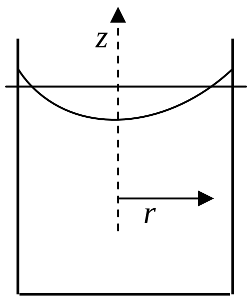
$$\frac{1}{2}\rho_a \mathrm{v}^2 = (\rho_w - \rho_0) gL$$

أو

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2(\rho_w - \rho_0) gL}{\rho_a}} = \sqrt{\frac{2(1000-750)(9.8)(0.05)}{1.29}} = 13.8\, m/s$$

دوران اسطوانة بها سائل

يمكن استخدام معادلة بيرنولي لدراسة دوران سائل في صهريج أسطواني. افرض أن السائل موضوع داخل اسطوانة نصف قطر قاعدتها r. إذا دارت الاسطوانة بسرعة زاويّة ω ، كما موضّح أدناه، فإن سطح السائل يصبح متقعرا عندما يستقر السائل.



بتطبيق معادلة الضغط في اتجاه مركز الدوران نحصل على

$$\frac{d}{dr}(P + \gamma z) = -(-\rho \frac{\mathrm{v}^2}{r})$$

وذلك لأن التسارع المركزي يكون اتجاهه إلى الداخل، عكس اتجاه r. وبما أن $v = \omega r$ تصبح المعادلة أعلاه

$$\frac{d}{dr}(P+\gamma z) = \rho\omega^2 r$$

وحلها هو

$$P+\gamma z - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = C$$

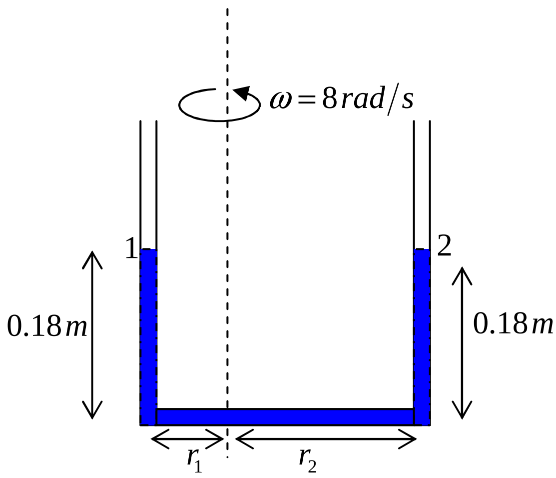
حيث C ثابت التكامل. وبوضع $\gamma = \rho g$ و $v = \omega r$ نحصل على

$$\frac{P}{\gamma} + z - \frac{v^2}{2g} = const.$$

والتي توضح أن سطح السائل يتخذ شكل قطع مكافئ (**Parabola**). تختلف المعادلة أعلاه من معادلة بيرنولي في إشارة الحد الثالث.

مثال(16):

وُضع ماء في أنبوبة في شكل الحرف U وكان شكلها موضّح أدناه.



إذا دارت الأنبوبة بسرعة زاوية $\omega = 8 rad/s$ حول محور عمودي يبعد عنه أحد طرفي الأنبوبة مسافة $0.18m$ والآخر $0.36m$ وكان ارتفاع الماء متساو في طرفي الأنبوبة ويساوي $0.18m$ في البدء. ما هو طول ارتفاعا الماء في كل طرف بعد الدوران؟

الحل

بتطبيق المعادلة أعلاه واختيار نقطتين عند سطحي الأنبوبة، نحصل على

$$P_1+\gamma z_1-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r_1^2=P_2+\gamma z_2-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r_2^2$$

ولكن $P_1=P_2=p_0$ وبما أن طول عمود الماء الكلي في الأنبوبتين القائمتين ثابت، فإن $z_1+z_2=0.36$. بالتعويض في المعادلة أعلاه نجد أن

$$z_1-z_2=\frac{1}{2}\rho\omega^2(r_1^2-r_2^2)=\frac{1}{2}(1000)(8)^2\left((0.18)^2-(0.36)^2\right)=-0.318$$

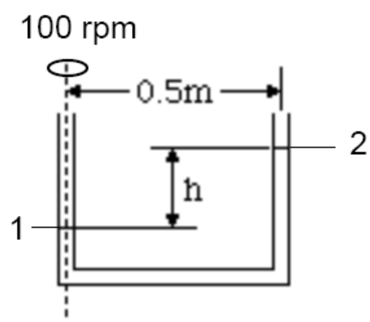
وباستخدام المعادلة $z_1+z_2=0.36$ ، نحصل على

$$z_1=0.021m\ ,\ z_2=0.339m$$

يعني هذا أن الماء سيرتفع، بعد الدوران، في الطرف البعيد من محور الدوران مسافة أكبر من ارتفاع الماء في الطرف القريب.

مثال(17):

تحتوي أنبوبة في شكل الحرف U على ماء. إذا دارت حول احد ازرعها بسرعة $100\,\text{rpm}$ ، كم سيكون الفرق بين مستوى السائل في الذراعين؟



الحل

من معادلة الضغط نجد أن

$$\frac{P}{\gamma}+z-\frac{v^2}{2g}=\frac{P}{\gamma}+z-\frac{\omega^2 r^2}{2g}=cont.$$

وباختيار نقطتين 1 و 2 نجد أن

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1-\frac{\omega^2 r_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2-\frac{\omega^2 r_2^2}{2g}$$

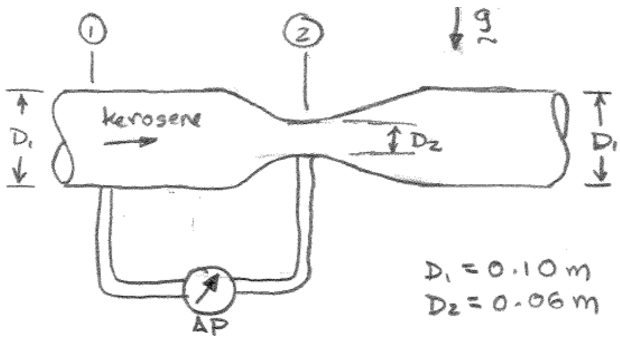
ولكن $P_1=P_2=P_0$ و $100\,rpm=\frac{2\pi}{60}100=10.47\,rad/s$ وبذلك يكون الفرق بين مستوى الماء في الذراعين

$$z_1-z_2=\frac{\omega^2}{2g}(r_1^2-r_2^2)=\frac{(10.47)^2}{2(9.8)}(0-(0.5)^2)=-1.39\,m$$

وعليه يكون ارتفاع الماء في الأنبوبة اليمنى أعلى من اليسرى بمقدار $1.39\,m$ عندما تدور الأنبوبة.

مثال(18):

من استخدامات معادلة بيرنولي هي مقياس فنتوري لمعّدل التدفق، كما موضّح في الرسم أدناه.



إذا مرّ كيروسين كثافته $\rho = 850 kg/m^3$ في هذه الأنبوبة، فأوجد فرق الضغط بين طرفي الأنبوبة اللازم لقياس معّدل تدفق يتراوح من $0.005 m^3/s$ إلى $0.05 m^3/s$.

الحل

بم أن الأنبوبة موضوعة أفقيا فإن فرق الضغط هو

$$\Delta P \equiv P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{g}(\mathrm{v}_2^2 - \mathrm{v}_1^2)$$

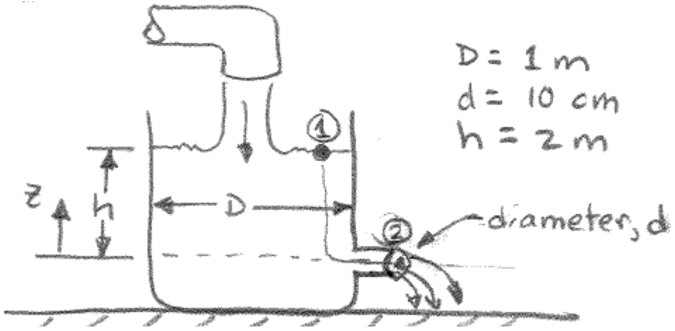
ومن معادلة الاستمرارية $A_1\mathrm{v}_1 = A_2\mathrm{v}_2 = Q$. وبم أن $A = \frac{\pi}{4}D^2$ حيث D هو قطر الأنبوبة تصبح معادلة الاستمرارية في الصورة $\mathrm{v}_1 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \mathrm{v}_2$ وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على

$$\Delta P \equiv \frac{1}{2}\rho\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2\left(1 - \left(\frac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}_1}\right)^4\right)$$

ومنها عند $Q = 0.005 m^3/s$ نجد أن $\Delta P = 1160\,Pa$ وعند $Q = 0.05 m^3/s$ نجد أن $\Delta P = 116\times10^3\,Pa$. نلاحظ أن زيادة معّدل التدفق بعشرة أضعاف تنتج زيادة في الضغط مئة مرة.

مثال (19):

يتدفق تيار من الماء خلال أنبوبة قطرها $d=10cm$ من على ارتفاع $h=2m$ من قمة صهريج أسطواني قطر قاعدته $D=1m$ ، كما موّضح في الرسم. أوجد معّدل تدفق الماء اللازم من خلال الأنبوبة الداخلة لكي يبقى ارتفاع مستوى الماء مستقرا.



الحل

من معادلة بيرنولي

$$\frac{P_1}{\rho g}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\rho g}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

نجد أن $z_1=h$ و $z_2=0$ و $P_1=P_2=P_0$. وبالتعويض نحصل على $h+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g}$ أو $2gh+v_1^2=v_2^2$. ومن معادلة الاستمرارية نجد أن

$$v_1=\frac{A_2}{A_1}v_2=\left(\frac{d}{D}\right)^2 v_2 \ \text{،}\ A_1v_1=A_2v_2=Q$$

نحصل على

$$2gh+\left(\frac{d}{D}\right)^4 v_2^2=v_2^2$$

أو

$$v_2^2\left(1-\left(\frac{d}{D}\right)^4\right)=2gh$$

ومنها نجد أن

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d}{D}\right)^4}} = \sqrt{\frac{2(9.8)(1)}{1-\left(\frac{0.1}{1}\right)^4}} = 6.26\ m/s$$

ويكون معدّل التدفق

$$Q = A_2 v_2 = \frac{\pi}{4} d^2 v_2 = \frac{\pi}{4}(0.1)^2(6.26) = 0.05 m^3/s$$

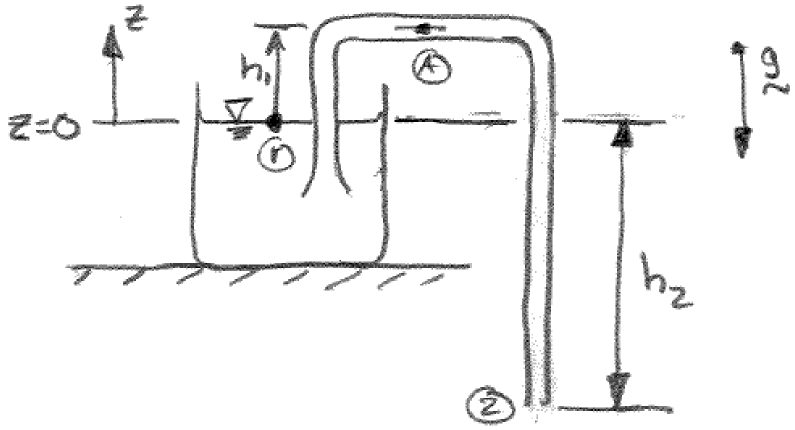
إذا كانت هنالك قوى احتكاك فان معدل التدفق الحقيقي يكون

$$Q = c_D A v$$

حيث c_D هو معامل التدفق. وللتدفق خلال فتحة صغيرة (**Orfice**) في وجود قوة لزوجة تكون السرعة الحقيقة $v_V = c_v v$ حيث c_v هو معامل السرعة.

مثال(20):

تعمل أسطوانة في شكل الحرف U سايفون للماء. إذا كان انحناء الأنبوبة على ارتفاع فوق $h_1 = 1m$ من سطح الماء، وكان الجزء الخارج من الأنبوبة على ارتفاع $h_2 = 7m$ أسفل مستوى الماء، كما موّضح في الشكل أدناه.



أوجد سرعة الماء والضغط الكلي في الجزء المنحني من الأنبوبة.

الحل

من معادلة بيرنولي للنقطتين 1 و 2 نجد أن

$$\frac{P_1}{\rho g}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\rho g}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

بم أن $P_1=P_2=P_0$ نجد أن $\left(v_1^2-v_2^2\right)=2g\left(z_2-z_1\right)$ ، ومن معادلة الاستمرارية نجد أن $A_1v_1=A_2v_2$ ومنها

$$\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2-v_2^2\right)=2g\left(z_2-z_1\right)$$

أو

$$v_2^2\left(1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)=2g\left(z_1-z_2\right)$$

ومنها تكون

$$v_2=\sqrt{\frac{2g\left(z_1-z_2\right)}{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}=\sqrt{2g\,h_2}$$

حيث $z_2=-h_2$ و $A_2<<A_1$. وبالتعويض نجد أن $v_2=\sqrt{2(9.8)(7)}=11.7\,m/s$.

لإيجاد الضغط عند النقطة A نستخدم معادلة بيرنولي

$$\frac{P_1}{\rho g}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_A}{\rho g}+z_A+\frac{v_A^2}{2g}$$

ومنها نحصل على

$$P_A-P_1=\rho g(z_1-z_A)+\frac{1}{2}\rho\left(v_1^2-v_A^2\right)$$

من معادلة الاستمرارية $v_1=\left(\frac{A_A}{A_1}\right)v_A$ تصبح المعادلة أعلاه في الصورة التالية

$$P_A-P_1=\rho g(z_1-z_A)+\frac{1}{2}\rho v_A^2\left(\left(\frac{A_A}{A_1}\right)^2-1\right)$$

أو

$$P_A - P_1 = -\rho g h_1 - \frac{1}{2}\rho v_A^2 = -\rho\left(g h_1 + \frac{1}{2}v_A^2\right)$$

$$P_A - P_1 = -1000\left(9.8\times 1 + \frac{1}{2}(11.7)^2\right)$$

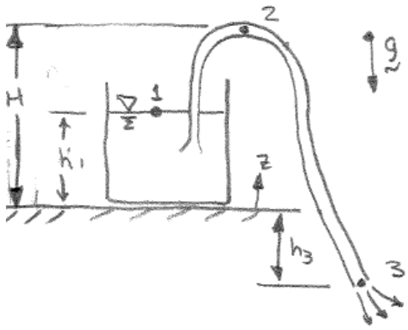
$$P_A - P_1 = -78255\,Pa$$

ويكون الضغط الكلي (المطلق)

$$P_A = P_0 - 78255\,Pa = 101.3 - 78.255 = 23\,kPa$$

$$P_A = 23\,kPa$$

مثال(21):



يخرج ماء من خزان ارتفاعه h_1 خلال سايفون قطره ثابت ينتهي أسفل الأرض على عمق h_3، كما موّضح في الرسم أعلاه. ما هو الارتفاع H اللازم لكي لا يُحدِث فقاعات (**Cavitation**).

الحل

بتطبيق معادلة بيرنولي عند النقاط 1,2,3 نحصل على

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{P_3}{\rho g} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

ومن معادلة الاستمرارية $v_1 A_1 = v_2 A_2 = v_3 A_3$ ولكن $A_2 = A_3$ وبالتالي فإن $v_2 = v_3$.

نعلم أن $z_1 = h_1 = 45\,cm$ و $z_2 = h_2 = H$ و $z_3 = -h_3 = -15\,cm$. باعتبار أن $A_1 >> A_2$, $P_3 = 0$, $v_1 = 0$، نحصل على $z_1 = z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$ ومنها $v_3 = 2g\,(z_1 - z_3) = 2(9.8)(0.45 + 0.15) = 11.76\,m/s = v_2$. تحدث ظاهرة الفقاعات

إذا كان ضغط البخار (P_v) أقل من ضغط المائع ($P_v \le P_2$). يحدث أكبر ارتفاع للمائع (H) عندما يكون $P_v = P_2$. وبوضع $P_v = P_2$ في معادلة بيرنولي نجد أن

$$\frac{P_0}{\rho g} + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_v}{\rho g} + H + \frac{v_2^2}{2g}$$

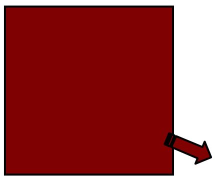
ومنها نحصل على

$$H = \frac{P_0 - P_v}{\rho g} + h_1 - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{101.3\times10^3}{1000(9.8)} + 0.45 - \frac{(11.7)^2}{2(9.8)} = 0.76m$$

يسبب هذا الارتفاع الكبير تكوين فقاعات عند النقطة 2 وبالتالي يتوقف صعود الماء في السايفون. وكلما كان ارتفاع النقطة 3 ، h_3 قليلا، تزيد سرعة الماء عندها وبالتالي تزيد سرعة النقطة 2 ، v_2. وعليه تنقص قيمة أكبر ارتفاع H_{max}. إذاً لابد من تصميم السايفون بطريقة سليمة حتى نمنع اختلاف الضغط ($P_0 - P_2$) عبر جدار الأنبوبة من تمزيق أنبوبة (خرطوش) السايفون.

مثال(22):

إذا صنعنا فتحة صغيرة عند نقطة على ارتفاع h من قاع حوض به سائل عمقه H ، ما هي سرعة خروج الماء خلال هذه الفتحة. أوجد الزمن اللازم لتفريغ الحوض تماما، إذا كان قطر الفتحة $50mm$ وعلى ارتفاع $0.5m$ وارتفاع الحوض $3m$ وقطره $1.5m$.



الحل:

بتطبيق معادلة بيرنولي على نقطتين 1 و 2 نكتب

$$\frac{P_0}{\rho g} + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + H + \frac{v_2^2}{2g}$$

بم أن $P_1 = P_2 = P_0$ و $v_1 = 0$ نحصل على $v_2 = \sqrt{2g(H - h_1)}$ والتي تشبه سرعة مقذوف من ارتفاع $y = (H - h_1)$ تحت تأثير الجاذبية الأرضية. تُعرف هذه بنظرية تورشيلي (Torricelli's Theorem). يُعطى معّدل التدفق بالمعادلة $A_1 v_1 = A_2 v_2$ حيث $A_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2$ مساحة قاعدة الحوض و $A_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2$ مساحة مقطع الفتحة الصغيرة، ومنها يكون $A_2 \frac{dh}{dt} = A_1 v_1$

$$A_2 \frac{dz}{dt} = -A_1\sqrt{2g\,z} = -A_1\sqrt{2g}\ z^{1/2}$$

حيث تعني الإشارة السالبة نقصان ارتفاع الماء مع الزمن. إذاً فإن $z^{-1/2}dz = -\frac{A_1}{A_2}\sqrt{2g}\ dt$ ومنها نجد أن

$$\Delta t = \frac{2(A_1/A_2)}{\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right)$$

وبتعويض $h_1 = 0.5m\ ,\ h_2 = 3m\ ,\ d_1 = 1.5m,\ d_2 = 0.05m$ فإن $\frac{A_1}{A_2} = 900$ ومنها يكون الزمن اللازم لتفريغ الحوض هو

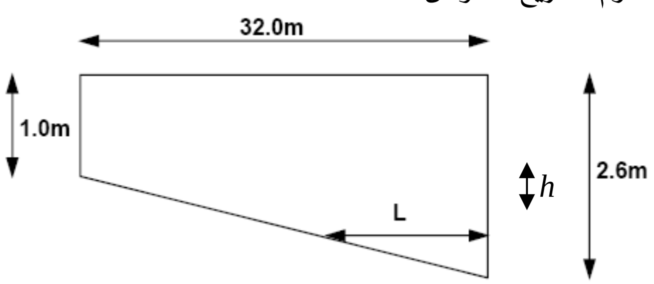
$$\Delta t = \frac{2(A_1/A_2)}{\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right) = \frac{2(900)}{\sqrt{2(9.8)}}\left(\sqrt{3} - \sqrt{0.5}\right) = 417\sec = 6.95\min\ .$$

مثال(23):

حوض سباحة طوله $32m$ وعرضه $8m$. عمق الماء عند أحد طرفيه يساوي $1m$ ويزيد بانتظام ليصبح $2.6m$ عند الطرف الآخر. يُراد تفريغه عبر فتحة صغيرة مساحتها $0.224m^2$ في نهاية العمق الأكبر. بفرض أن معدّل التدفق خلال الفتحة هو $Q = 0.6\,A\mathrm{v}$، أوجد:

أ - الزمن اللازم لكي ينقص عمق الماء بمقدار $1m$

ب - الزمن اللازم لتفريغ الحوض.



الحل

بتطبيق معادلة بيرنولي على نقطة في السطح، 1 والفتحة، 2 نحصل على

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

وبوضع $P_1 = P_2 = 0, \mathrm{v}_1 = 0$ نجد أن $\mathrm{v}_2 = \sqrt{2gh}$ حيث h ارتفاع الماء أعلى الفتحة.
يُعطى معدّل تدفق الماء عبر الفتحة بالعلاقة

$$Q = 0.6A_2\,\mathrm{v}_2 = 0.6A_2\sqrt{2gh} = 0.6(0.244)(\sqrt{2(9.8)}\sqrt{h} = 0.595\sqrt{h}$$

يمكن أن نكتب علاقة بين معدّل التدفق والارتفاع h على الصورة $Q = -\mathrm{A}\dfrac{dh}{dt}$

ومنها نجد أن $dt = -\dfrac{\mathrm{A}}{Q}dh$ ويكون الزمن اللازم ليرتفع الماء من h_1 إلى h_2 هو

$$t = \int_{h_1}^{h_2}\left(-\frac{\mathrm{A}}{Q}dh\right) = -1.68\int_{h_1}^{h_2}\left(\frac{A}{\sqrt{h}}dh\right)$$

وبوضع $A = 8(32) = 256\,m^2$ يكون

$$t = -1.68\int_{h_1}^{h_2}\left(\frac{A}{\sqrt{h}}dh\right) = 430.08\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right)$$

إذاً يكون الزمن اللازم هو

$$t = 430.08\left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1}\right)$$

وبالتعويض نحصل على الزمن اللازم لكي ينقص عمق الماء مترا واحدا

$$t = 430.08\left(\sqrt{2.6} - \sqrt{1.6}\right) = 299\sec$$

ب - لكي يتفرغ الحوض كليا نحتاج لعلاقة المساحة A بدلالة ارتفاع السطح، h.
من الشكل أعلاه نجد أن $A = 8L$ و $\dfrac{L}{h} = \dfrac{32}{1.6} = 20$ وعليه فان $A = 160h$ وبالتالي يكون الزمن اللازم لتفريغ الحوض هو

$$t = -1.68\int_{h_1}^{h_2}\frac{160h}{\sqrt{h}}dh$$

$$t = 179.26\left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}\right) = 179.26\left(1.6^{3/2} - 0^{3/2}\right)362.67\sec$$

ويصبح الزمن الكلي لتفريغ الحوض هو $t = 299 + 262.67 = 561.67\sec$.

مثال(24):

تهب رياح أعلى منزل بسرعة $47.4\,m/s$. ما هي القوة التي يرفع بها الهواء في الداخل سقف المبنى إذا كانت مساحته $668\,m^2$ وكثافة الهواء $1.29\,kg/m^3$؟

الحل

بتطبيق معادلة بيرنولي لنقطتين داخل وخارج المنزل، نجد أن

$$\frac{P_{in}}{\gamma}+\frac{\mathrm{v}_{in}^2}{2g}+z_{in}=\frac{P_{out}}{\gamma}+\frac{\mathrm{v}_{out}^2}{2g}+z_{out}$$

وباعتبار ن الهواء ساكن داخل المنزل فإن $\mathrm{v}_{in}=0$ ومنها يكون

$$\Delta P=(P_{in}-P_{out})=\frac{1}{2}\rho(\mathrm{v}_{in}^2-\mathrm{v}_{out}^2),$$

$$\Delta F=\Delta P\,A=\frac{1}{2}\rho(\mathrm{v}_{in}^2-\mathrm{v}_{out}^2)\,A=\tfrac{1}{2}(1.29)(47.7^2-0^2)668$$

$$\Delta F=980\times10^3\,N=980\,\mathrm{kN}$$

وهي قوة ضخمة جدا تعادل حوالي ألف طن!

مثال(25):

يتدفق الدم عبر الأورطا الذي نصف قطره $r_a=1cm$ بسرعة $30\,cm/s$ وينتهي بالشعيرات الدموية التي نصف قطر كل منها $r_c=4\times10^{-4}cm$ بسرعة $5\times10^{-4}\,cm/s$.

أوجد عدد الشعيرات الدموية بجسم الإنسان.

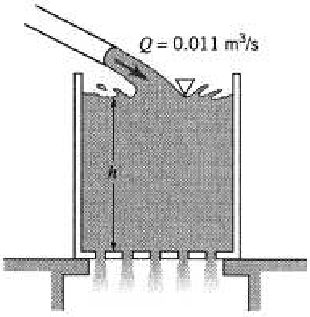
الحل

نعلم من معادلة الاستمرارية أن $A_a\mathrm{v}_a=n\,A_c\mathrm{v}_c$ حيث $A=\pi r^2$ وبالتالي فإن

أي بليون شعيرة دموية بجسم الإنسان، وهو عدد ضخم جدا

تمرين:

1 - ينساب ماء في صهريج كبير بمعدّل $0.01 m^3/s$ ، كما موضّح في الشكل أدناه.



إذا كان الماء يخرج من خلال 20 فتحة في أسفل الصهريج قطر كل منها $0.01m$. ما هو الارتفاع h الذي يكون عنده التدفق منتظما؟ (الإجابة: $h = 2.5m$).

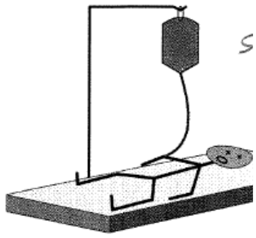
2 - يسجل باروميتر قراءة $735\,\text{mmHg}$ عندما وُضع أعلى مبنى وعندما وُضع أسفل المبنى سجّل قراءة $755\,\text{mmHg}$. خُذ كثافة الهواء $1.2 kg/m^3$ وكثافة الزئبق $13600 kg/m^3$. ما هو الاختلاف؟ وما هو ارتفاع المبنى؟ (الإجابة: $283m$).

3 - تُعطى سرعة مائع غير قابل للانضغاط بالعلاقة

$$\vec{v} = 4xy^2\hat{i} + f(y)\,\hat{j} - zy^2\hat{k}$$

ما هي الدالة $f(y)$ التي تحقق معادلة الاستمرارية (لكي تجعل تدفق المائع حقيقيا)؟ (الإجابة: $f(y) = -y^3 + C$ ، C ثابت).

4 - يُوضع دِرب (مُغذي) (**Intravenous Infusion**) كثافته $1020 kg/m^3$ لينساب عبر وريد مريض، كما موضّح في الشكل أدناه.



أ - إذا تعادل ضغط الدم في الوريد مع السائل عندما كان المُغذي على ارتفاع $1.2m$ من ساعد المريض، ما هو فرق ضغط الوريد من الضغط الجوي؟ (الإجابة: 12kPa)

ب - إذا لزم أن يكون فرق ضغط السائل من الضغط الجوي يساوي 20kPa عند ساعد المريض لكي يتحقق أفضل انسياب، ما هو الارتفاع المناسب الذي يجب وضع السائل عليه؟ (الإجابة: $2m$)

5 - يمر الهواء خلال أنبوبة قطرها $0.08mm$ داخل رئة شخص بمعّدل $10^{-9}\, m^3/s$. إذا كانت كثافة الهواء عند درجة 35^0 هي $1.146\, kg/m^3$ ومعامل لزوجته $1.865\times10^{-5}\, N\,s/m^2$ هل هذا التدفق طبقي أو اضطرابي؟

6 - يسحب شخص عصير في درجة حرارة 10^0 بمصاصة قطرها $4mm$ وطولها $0.25m$ بمعّدل $4cm^3/s$. هل سيكون التدفق في نهاية المصاصة، عند فم الشخص طبقي أم اضطرابي، إذا كانت معامل لزوجة العصير $1.307\times10^{-3}\, N\,s/m^2$ وكثافته $999.7\, kg/m^3$ ؟

7 - إذا كانت سرعة مائع ينساب في أنبوبة اسطوانية هي

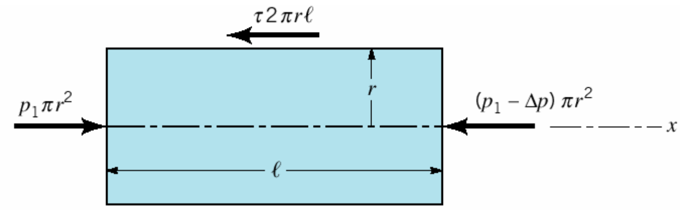
$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_c\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

حيث R نصف قطر الأنبوبة. على أي مسافة تكون السرعة المتوسطة مساوية للسرعة الحقيقية؟ الإجابة: $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$.

8 - ينساب مائع خلال أنبوبة أفقية قطرها $3cm$. إذا كان رأس الفقد $h_L = 1.92m$ عند طول يساوي $6m$ من الأنبوبة كان عدد رينولدز $R_e = 1500$. ما هي سرعة المائع المتوسطة، خذ $f = \frac{64}{R_e}$ ؟ الإجابة: $0.603 m/s$.

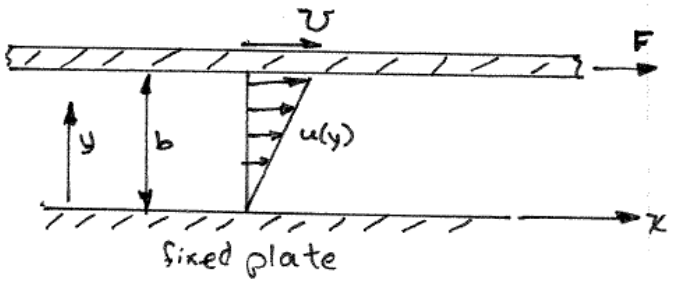
9 - يمر مائع لزج خلال أنبوبة أفقية قطرها $1.8m$ تحت فرق ضغط مقداره $28.9\,\text{kPa}$ لكل $30m$ من الأنبوبة بمعّدل تدفق مقداره $0.054 m^3/s$. أوجد معامل الاحتكاك f. الإجابة: $f = 0.03$.

10 – أثبت أن فرق الضغط بين طرفي مائع لزج يتدفق خلال أسطوانة طولها L وقطرها D هو $\Delta P = \frac{4L\tau_0}{D}$ حيث τ_0 إجهاد القص عند الجدار.



11 - ينساب مائع معامل لزوجته $0.048\,\text{Pa s}$ بين لوحين. إذا كانت سرعته عند النقطة A هي $1.125 m/s$ والتي تبعد مسافة $0.075m$ من الجدار، أوجد إجهاد القص عند النقطة B التي تبعد مسافة $0.05\,m$ من الجدار باعتبار أن السرعة تتغير خطياً مع الارتفاع من الجدار. الإجابة: $0.72\,N/m^2$.

12 - يتدفق مائع لزج بين لوحين متوازيين. عندما كانت المسافة بينهما $2mm$ تولد إجهاد قص مقداره $150\,Pa$ عند اللوح الأعلى عندما سُحب بسرعة $1m/s$.



أوجد لزوجة المائع بين اللوحين. الإجابة: $\eta = 0.3\,N\,s/m^2$

13 - إذا كانت سرعة مائع تُعطى بالعلاقة

$$\vec{v} = (2xyz+7)\hat{i} + x^2z\,\hat{j} + (x^2y+4)\hat{k}$$

هل يحقق المائع معادلة الاستمرارية؟ هل المائع في حالة دوران؟

14 - إذا كانت سرعة مائع تُعطى بالعلاقة

$$\vec{v} = (4z + Cx^2 + 7)\hat{i} + (3xy + zx)\,\hat{j} + (4x^2 + 12y^2 + 5xz)\hat{k}$$

ما هي قيمة الثابت C التي تجعل المائع حقيقي؟

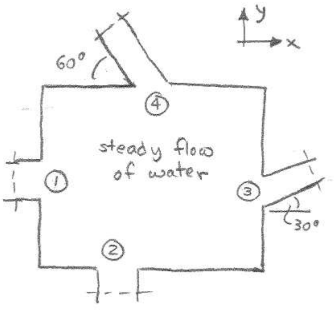
15 - إذا كانت سرعة مائع تُعطى بالعلاقة

$$\vec{v} = 4xy\,\hat{i} + 10y^2\,\hat{j} + Czy\,\hat{k}$$

ما هي قيمة الثابت C ودوامة المائع $\vec{\omega}$.

16 - خُذ حركة ماء مستقر خلال عدة أنابيب تُعطى مساحة كل منها على النحو التالي: $A_1 = 2.4\,m^2$ و $A_2 = 0.45\,m^2$ و $A_3 = A_4 = 0.4\,m^2$ ومعدل الكتلة الخارجة من الأنبوبة 3 هو $Q_3 = 3.6\,kg/s$ ومعدّل التدفق إلى الأنبوبة 4 هو $Q_4 = 0.1\,m^3/s$.

أحسب سرعة الماء خلال الأنبوبتين إذا كان الماء يدخل من الأنبوبتين 1 و 4 ويخرج من



الأنبوبتين 2 و 3.