الفصل الأول

مدخل لميكانيكا الموائع

A Preface to Fluid Mechanics

المائع عبارة عن وسط متصل من الجزيئات والجسيمات الصغيرة. يسمح لنا علم ميكانيكا الموائع معرفة مجموعات من هذه الجسيمات دون إلمامنا بما يفعله كل جسيم منها على حده. يعرف المائع بأنه إما سائل أو غاز. وفي الحالتين تكون جزيئات المائع في حالة حركة مستمرة. نجد أن المحيطات أكثر المنظومات التي تحتوي على المياه، حيث تمثل المياه حوالي 75% من سطح الكرة الأرضية.

ينقسم علم ميكانيكا الموائع إلى قسمين. يهتم القسم الأول بدراسة الموائع الساكنة (**Hydrostatics**) والقسم الآخر بدراسة الموائع الجارية (**Hydrodynamics**). هناك علم ديناميكا الهواء (**Aerodynamics**) والذي يختص عموماً بحركة الطائرات والمركبات الفضائية، وعلم آخر هو علم ديناميكا الماء (**Hydrology**) ويهتم بتدفقات المياه. فبدون تدفقات الموائع لا يمكن أن تستمر الحياة على كل صورها. ففي جسم الإنسان يجري الماء والأملاح والدم والأكسجين وهي عبارة عن موائع. وتطفو العينين في موائع تمنحها سهولة الحركة. وتتحرك على الأرض الرياح والمياه لتمنح الأرض حيويتها وبقائها. فيحيط بالأرض الغلاف الجوي الذي يحمي الأرض من العديد من المخاطر، وفي باطن الأرض حمم ومياه وبترول.

لقد وضع العالم أسحق نيوتن القواعد الأساسية لوصف تدفقات الموائع. ولقد أسهم في وضع أسس خصائص الموائع وقوى الاحتكاك بين جزيئات الموائع. وهناك علماء كثيرون قدموا مساهمات مماثلة في تطوير وتقدم علم ميكانيكا الموائع مثل، فنتوري (**Venturi**) و بيتوت (**Pitot**) اللذان صنعا أجهزة لقياس ضغط الموائع و ساعد بيتوت في فهم ضغط الركود (**Stagnation Pressure**) والنقاط التي يكون عندها، و بيرنولي (**Bernoulli**) الذي وضع علاقة ضغط المائع بسرعته. ووضع بوازيل (**Poiseuille**) وستوكس (**Stokes**) ورينولدس (**Reynolds**) العلاقة بين تدفق الموائع اللزجة في الأنابيب (مثل حركة الدم في الشرايين). ووضع العالم أويلر (**Euler**) قانون تدفق المائع المثالي. ووسع العالمان لاجرانج (**Lagrange**) ونافيير (**Navier**) دراساتهم عن ميكانيكا الموائع. إن التقدم في مجال علم ميكانيكا الموائع الذي أنجزه العلماء خلال العقدين الماضيين كان كبيراً خاصة في مجال ميكانيكا الموائع العددية (الحسابية).

تختلف ميكانيكا الموائع عن ميكانيكا الجسم الصلب. بينما للجسم الصلب شكل محدد ، نجد أن ليس للمائع شكلاً محدداً ، ويتغير شكل المائع بتأثير الظروف الخارجية عليه. تحكم الموائع نفس قوانين الجسم الصلب. لدراسة حركة الموائع نطبق القوانين الأساسية للحركة وهي:

(أ) مبدأ حفظ الكتلة

(ب) القانون الأول للديناميكا الحرارية (مبدأ حفظ الطاقة)

يختلف الغاز عن السائل في عدة أوجه. فالسائل يستقر تحت تأثير الجاذبية يتخذ سطحه شكلاً محدداً ، بينما يتوزع الغاز بالتساوي داخل الإناء الذي يوضع فيه. تختلف الخصائص الفيزيائية للمائع باختلاف طبيعة الكمية تحت الدراسة. إذا أثرت قوة على سائل فإن السائل يغير من شكله ولكن يبقي حجمه ثابتا ، ولكن الغاز يغير حجمه ويبقي كتلته ثابتة. لدراسة خصائص الغاز نستخدم عامة علم الحسبان ذو المتغيرات المتعددة لمعرفة تغيرها. فسرعة جزيئات المائع مثلاً تعتمد على إحداثيات النقطة تحت الدراسة. ونحدد إحداثيات كل نقطة في النظام الكارتيزي بموقع النقطة واللحظة المأخوذة عندها ، أي (x, y, z, t).

نوصف الموائع بكميات تختلف عن الجسم الصلب وذلك لسهولة التعامل مع هذه الكميات لتحديد خصائص المائع. من هذه الكميات:

(أ) الكثافة

(ب) الضغط

(ج) اللزوجة (الديناميكية والحركية)

(د) قابلية المائع للاستجابة للضغط الخارجي (الإنضغاطية)

(هـ) معامل التوتر السطحي

(و) ثوابت ليست لها أبعاد (عدد رينولدز)

(ي) الطفو (Buoyancy)

سنتطرق لهذه الخصائص خلال دراستنا لحركة المائع في الفصول القادمة.

(أ) الكثافة (Density)

الكثافة هي النسبة بين كتلة الجسم (m) إلى حجمه (V). عموما تكون كثافة المائع ثابتة مهما اختلف حجمه وكتلته، كالماء على سبيل المثال لا تعتمد كثافته علي حجمه. نرمز للكثافة بالرمز (ρ) حيث

$$\rho = \frac{m}{V}$$

نجد أن كثافة الماء النقي عند درجة حرارة $4\,^0C$ تساوي $\rho = 1000\,kg/m^3$ وتساوي $\rho = 998.2\,kg/m^3$ عند درجة حرارة $20\,^0C$. وللهواء نجد أن كثافته تساوي $\rho = 1.204\,kg/m^3$ عند الضغط الجوي العادي وفي درجة حرارة $20\,^0C$، ورغم صغر هذه الكثافة يلعب الهواء دوراً هاماً في حياتنا على كوكب الأرض. نلاحظ أن كثافة الماء تعادل 1000 مرة قدر كثافة الهواء. الجدير بالذكر، أن للماء خصائص فريدة، فإذا برد الماء قلت كثافته دون بقية السوائل كلها. وبفضل هذه الميزة تستطيع الأحياء البحرية العيش في قاع البحار والأنهار والبحيرات دون أن تتجمد أعماقها عندما يتجمد السطح.

إذا لم تتغير كثافة المائع مع تغير الضغط يقال بأن المائع غير قابل للانضغاط (**Incompressible fluid**). تعتمد انضغاطية المائع على سرعة الصوت داخله. فتكون سرعة الصوت عالية داخل المائع ذو الكثافة العالية. فسرعة الصوت في الهواء حوالي $300\,m/s$ وفي الماء حوالي $1000\,m/s$.

يمكن ضغط المائع فقط إذا تجاوزت سرعته سرعة الصوت. فلا نجد صعوبة في ضغط الهواء حيث تتحرك بعض أنواع الطائرات (كونكورد) بسرعة تفوق سرعة الصوت.

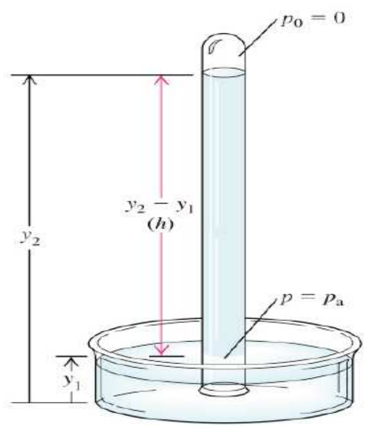
(ب) الضغط (Pressure)

الضغط هو مقدار القوة (F) الواقعة عمودياً علي المساحة (A). نكتب ذلك على الصورة

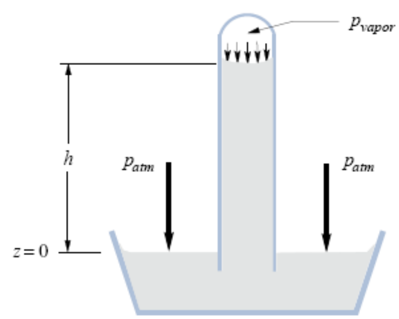
$$P = \frac{F}{A}$$

فالضغط كمية قياسية حيث تعمل دائما في اتجاه عمودي على السطح. يؤثر الضغط في الاتجاهات بالتساوي. ويقاس الضغط بوحدة الباسكال (Pa) وهو عبارة عن $Pa = N/m^2$ وعامة ما نستخدم الكيلوباسكال (kPa) لقياس الضغط. وهناك وحدات أخرى تعرف بالبار (**Bar**) والملمتر زئبق (**mmHg**) والتور (**Torr**). يمكن أن يولد

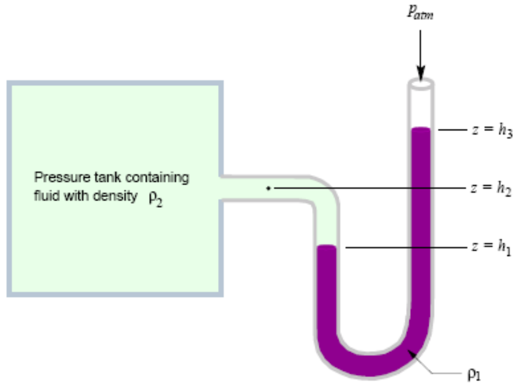
ضغط صغير قوة هائلة إذا أثر على مساحة كبيرة $F = PA$. والضغط هو عبارة أيضا عن الطاقة على وحدة الحجوم. يقاس الضغط بعدة أجهزة منها المانوميتر والباروميتر.



يوضح الشكل أدناه جهاز الباروميتر



ويوضح الشكل ادناه جهاز المانوميتر.

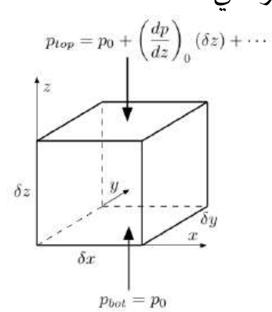


بينما تكون للسوائل كثافة ثابتة، فإن كثافة الغازات تعتمد على ضغط ودرجة حرارة الغاز. تُعّرف معامل الانضغاطية على الصورة

$$K = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}$$

تنشأ القوة المؤثرة على الموائع نتيجة لإجهاد السريان (بسبب اللزوجة أو الضغط) أو نتيجة لقوى الجاذبية أو تسارع المائع نفسه. سندرس هنا حركة مائع ساكن لا يوجد فيه انحدار للسرعة (لا توجد قوى لزوجة). تصبح هنالك قوتان بسبب الضغط أو الجاذبية (الوزن).

خذ حركة مائع داخل صندوق. نود هنا أن نحصل على فرق الضغط بين أسفل وأعلى الصندوق، نأخذ هنا البعد الراسي z.



بم أن المائع ساكن فإن محصلة القوى المؤثرة على المائع صفراً. وعليه فأن انحدار الضغط يكون

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

وسبب الإشارة السالبة أن الارتفاع z يكون موجباً إلى أعلى، عكس اتجاه الجاذبية. يعني هذا أن الضغط ينقص كلما ارتفعنا إلى أعلى، فيكون الضغط عند أسفل الإناء أكبر من الضغط عند السطح. نجد كذلك أن هناك اختلاف في الضغط في الضغط في الاتجاهين الآخرين x, y ويصبح الانحدار في الضغط على الصورة

$$\vec{\nabla}P = \frac{\partial P}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\hat{k}$$

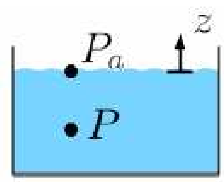
وبهذه الطريقة تصبح معادلة الضغط الساكن أعلاه على الصورة

$$\vec{\nabla}P = -\rho g \hat{k}$$

ومن هذه المعادلة فإن

$$P = P_0 - \rho g z$$

حيث $z = 0$ عند أعلى السطح. يُعرف P_0 بالضغط الجوي P و بالضغط الكلي أو المطلق.



تُعطى القوة الأفقية المؤثرة على السطح الجانبي (الجدار) بالمعادلة

$$dF_x = PdA = (P_o - \rho g z)\, w\, dz$$

حيث w عرض الجدار. تؤثر القوة ناحية اليسار

$$dF_L = (P_o - \rho g z)\, w\, dz$$

وتقابلها قوة ناحية اليمين

$$dF_r = -P_0\, w\, dz$$

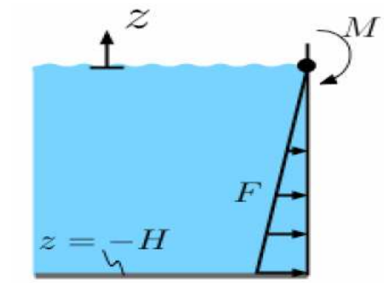
وتكون القوة المحصلة

$$F = \int_{-H}^{0} (-\rho g z)\, w\, dz = \frac{1}{2}\rho g w H^2$$

حيث H عمق المائع.

وتؤثر هذه القوة عند نقطة ارتفاعها يُعطى من العزم

$$dM_0 = z \times dF$$



M_0 هو العزم بالنسبة للحائط حول المركز و z ذراع العزم العمودي على القوة.

$$dM_0 = z\times(-\rho g z) w dz$$

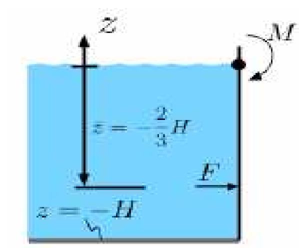
وبالتكامل نحصل على العزم

$$M_0 = -\frac{1}{3}\rho g w H^3$$

ولكن نعلم أن

$$M_0 = F\bar{z}$$

حيث $\bar{z}$ هو الارتفاع الذي تؤثر عنده القوة F.



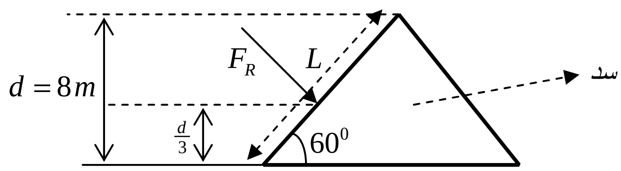
وبالتعويض من المعادلتين أعلاه نحصل على

$$\bar{z} = \frac{-\frac{1}{3}\rho g w H^3}{-\frac{1}{2}\rho g w H^3} = \frac{2}{3}H$$

تُعرف النقطة التي تؤثر عندها هذه القوة المحصلة بمركز الضغط.

مثال (1):

خزان طوله $30.5m$ وارتفاعه $8m$، كما في الشكل أدناه، أوجد:



أ- مقدار القوة المؤثرة عليه بسبب ضغط الماء.

ب- نقطة تأثير هذه القوة من أسفل الخزان.

الحل

أ- تُعطى القوة العمودية بالعلاقة

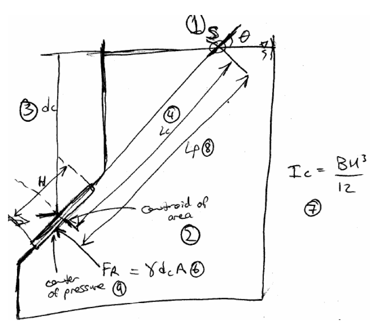
$$F_R = \gamma\left(\frac{d}{2}\right)A$$

$$\sin\theta = \frac{d}{L} \quad , \quad L = \frac{d}{\sin\theta} = \frac{8}{\sin 60} = 9.24m$$

وتكون مساحة سطحه $A = (9.24)(30.5) = 281.8m^2$ ، و $\gamma = \rho g = (1000)(9.8) = 9800\, N/m^3$. إذاً فإن مقدار القوة العمودية على الخزان هو

$$F_R = \gamma\left(\frac{d}{2}\right)A = (9800)\left(\frac{8}{2}\right)(281.8) = 11060\, N$$

ب- يُعطى مركز الضغط للشكل المثلث بالعلاقة $y_c = \frac{d}{3} = \frac{8}{3} = 2.67m$ أعلى قاعدة الخزان. وفي اتجاه واجهة الخزان تكون هذه النقطة على مسافة $\frac{L}{3} = \frac{9.24}{3} = 3.08m$ أعلى قاعدة الخزان.

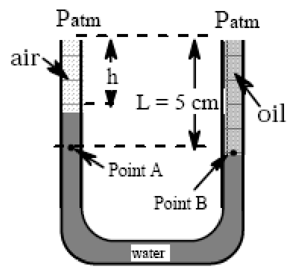


$F_R = \gamma d_c A$ و $A = BH$ و $B = length$ ويكون مركز الضغط

center of pressure أسفل الـ**centeroid** $(L_p - L_c)$ $L_p = L_c + \frac{I_c}{L_c A}$

مثال (2):

وضع زيت فوق ماء موضوع في أنبوبة على شكل الحرف U فازاحت الهواء على الناحية الاخرى، كما في الشكل أدناه. أوجد ارتفاع عمود الهواء، h. وإذا مر الهواء على الأنبوبة اليسرى ما هي سرعته، علما بان كثافة الهواء تساوي $\rho_a = 1.29\,kg/m^3$ وكثافة الزيت $\rho_0 = 750\,kg/m^3$ ؟



الحل

الضغط متساو عند النقطتين A و B ، أي $P_A = P_B$ ، فنجد أن

$$P_A = P_0 + \rho_a gh + \rho_w g(L-h)$$

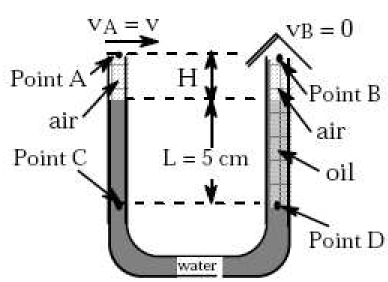
و

$$P_B = P_0 + \rho_0 gL$$

ومنهما يكون طول عمود الهواء

$$h = \frac{\rho_w - \rho_0}{\rho_w - \rho_a} L = \frac{1000-750}{1000-1.29} 5 = 1.25\,cm$$

عند مرور الهواء أعلى الأنبوبة اليسرى يتعادل مستوى المائع في الأنبوبتين



ومن معادلة بيرنولي، نجد للنقطتين A و B أن

$$P_A + \frac{1}{2}\rho_a \mathrm{v}^2 + \rho_a g y_A = P_B + \frac{1}{2}\rho_a (0)^2 + \rho_a g y_B$$

و

$$P_C = P_A + \rho_a \mathrm{g} \mathrm{H} + \rho_w g L$$

و

$$P_D = P_B + \rho_a \mathrm{g} \mathrm{H} + \rho_0 g L$$

من مبدأ باسكال نجد أن $P_C = P_D$ ، وعليه يكون

$$P_B + \rho_a \mathrm{g} \mathrm{H} + \rho_0 g L = P_A + \rho_a \mathrm{g} \mathrm{H} + \rho_w g L$$

أو

$$P_B - P_A = (\rho_w - \rho_0) g L$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على

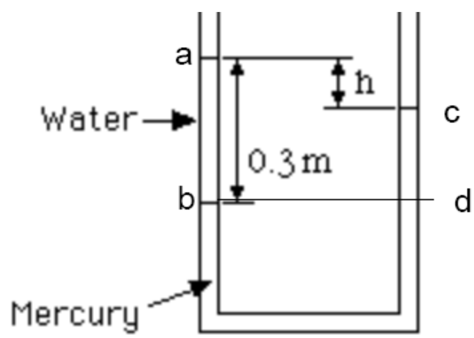
$$\frac{1}{2}\rho_a \mathrm{v}^2 = (\rho_w - \rho_0) g L$$

أو

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2(\rho_w - \rho_0) g L}{\rho_a}} = \sqrt{\frac{2(1000-750)(9.8)(0.05)}{1.29}} = 13.8\, m/s$$

مثال (3):

تحتوي أنبوبة في شكل الحرف U على ماء وزئبق، كما في الشكل أدناه. إذا كانت كثافة الزئبق $13550\, kg/m^3$ وكثافة الماء $998\, kg/m^3$ ، أوجد طول العمود h الموضح في الرسم.



الحل

نلاحظ من الشكل أن $P_a = P_c = P_0$ وعند b يكون الضغط $P_b = P_a + \rho_w g(0.3)$
وعند d نجد أن $P_d = P_b = P_c + \rho_{Hg} g\,(0.3-h)$. وبالتعويض نحصل على

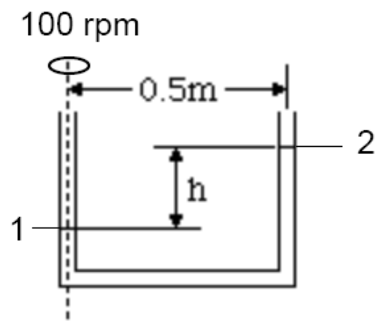
$$P_a + \rho_w g\,(0.3) = P_c + \rho_{Hg} g\,(0.3-h)$$

ومنها نجد أن

$$h = \frac{(\rho_{Hg} - \rho_w)(0.3)}{g} = \frac{(13550-998)(0.3)}{9.8} = 0.278\,m$$

مثال (4):

تحتوي أنبوبة في شكل الحرف U على ماء. إذا دارت حول احد اذرعها بسرعة $100\,\text{rpm}$ ، كم سيكون الفرق بين مستوى السائل في الذراعين؟



الحل

من معادلة الضغط نجد أن

$$\frac{P}{\gamma} + z - \frac{v^2}{2g} = \frac{P}{\gamma} + z - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = cont.$$

وباختيار نقطتين 1 و 2 نجد أن

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 - \frac{\omega^2 r_2^2}{2g}$$

ولكن $P_1 = P_2 = P_0$ و $100\,rpm = \frac{2\pi}{60}100 = 10.47\,rad/s$ وبذلك يكون الفرق بين مستوى الماء في الذراعين

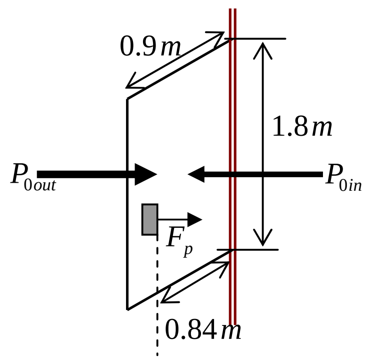
$$z_1 - z_2 = \frac{\omega^2}{2g}(r_1^2 - r_2^2) = \frac{(10.47)^2}{2(9.8)}(0-(0.5)^2) = -1.39\,m$$

وعليه يكون ارتفاع الماء في الأنبوبة اليمنى أعلى من اليسرى بمقدار $1.39\,m$ عندما تدور الأنبوبة.

مثال (5):

من داخل طائرة وعلى ارتفاع $9\,km$ من الأرض حاول أحد الركاب فتح باب الطائرة. إذا كانت أبعاد الباب هي $0.9\,m \times 1.6\,m$ ويفتح إلى الداخل. بفرض أن الضغط داخل الطائرة يساوي الضغط الجوي على ارتفاع $1.5\,km$ وأن الراكب يقبض على مقبض الباب الذي يبعد مسافة $0.84\,m$ من مفصل الباب. ما هي القوة اللازم بذلها بواسطة الراكب لكي يفتح الباب؟

الحل



الضغط الجوي على ارتفاع $9\,km$ يساوي $P_{0out} = 30.09\,\text{kPa}$ والضغط الجوي على ارتفاع $1.5\,km$ يساوي $P_{0in} = 84.31\,\text{kPa}$. قوة الضغط على الباب هي

$$F = (P_{0in} - P_{0out})A = (84.31 - 30.09)10^3(0.9 \times 1.6) = 7.8\,kN$$

وتؤثر هذه القوة على منتصف الباب. القوة اللازم بذلها بواسطة الراكب لفتح الباب يجب أن تؤثر عند مقبض الباب ونحصل عليها بأخذ العزوم حول مفصل الباب حيث نحصل على

$$F \times \frac{0.9}{2} = F_p \times 0.84$$

ومنها نحصل على قوة الراكب

$$F_p = F \times \frac{0.45}{0.84} = 7.8(10^3)(0.535) = 4.17\,\text{kN}$$

(ج) اللزوجة (Viscosity)

تُعّبر اللزوجة عن المقاومة التي يلقاها المائع عندما يتحرك حراً. تنشأ هذه القوة نتيجة للاحتكاك بين طبقات السائل. فالجلسرين يلقي مقاومة أكثر من الماء عندما يبدأ بالانسياب حراً. تختلف حركة المائع عن الجسم الصلب. فالمائع يتكون من طبقات متراصة فوق بعضها البعض. عندما تؤثر قوة خارجية على المائع، تنزلق هذه الطبقات فوق بعضها البعض فيتشوه شكل المائع ويبدأ بالانسياب.

خذ حركة طبقتين متجاورتين المسافة بينهما dy وفرق السرعة بينهما هو $d\text{v}$ فإن قوة الاحتكاك بينهما

$$F \propto A \qquad \text{و} \qquad F \propto d\text{v} \qquad \text{و} \qquad F \propto \frac{1}{dy}$$

أو على الصورة العامة

$$F \propto A\frac{d\text{v}}{dy}$$

ومنها نجد أن

$$F = \eta\, A\frac{d\text{v}}{dy}$$

حيث η ثابت يُعرف بمعامل اللزوجة، ويُعرف المقدار $\frac{d\text{v}}{dy}$ بانحدار السرعة (**Velocity Gradient**). يعتمد معامل اللزوجة η على درجة الحرارة. فيقل معامل اللزوجة للسوائل بزيادة درجة الحرارة ويزيد للغازات مع زيادة درجة الحرارة، حيث تعمل زيادة درجة الحرارة على تفكيك جزيئات السائل، فتسهل حركة الطبقات وبالتالي تنقص قوة الاحتكاك بين هذه الطبقات. أما في الغازات تعمل زيادة درجة الحرارة على زيادة التصادمات بين جزيئات الغاز المتحركة في اتجاهات عشوائية وبالتالي تزيد سرعاتها وتزيد قوة الاحتكاك بينها. والآن نُعّرف إجهاد القص (**Shear Stress**) على المائع بأنه مقدار القوة الواقعة على مساحة كل طبقة، أي

$$\tau = \frac{F}{A}$$

ومن المعادلة أعلاه يكون

$$\tau = \eta \frac{d\mathrm{v}}{dy}$$

تُعرف η بمعامل اللزوجة الديناميكي حيث ترتبط بالقوة المؤثرة على المائع. وتقاس η بوحدة $[\eta]=Pa\,s$ وفي نظام وحدات الـ(**cgs**) بوحدة البواز (**Poise**)، أي $1\,poise = dyne\,s/cm^2$. للماء $\eta = 10^{-3}\,Pa\,s$ وللهواء $\eta = 1.8\times10^{-5}\,Pa\,s$ عند درجة حرارة $20\,^0C$. تعّرف الموائع أيضا بمعامل اللزوجة الحركي (**Kinematic Viscosity**) بالعلاقة $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ ويقاس بوحدة $[\nu]=m^2/s$ ويتغير مع تغير درجة الحرارة. تصبح الزوجة ذات أهمية قصوى عند نهايات الجسم. ويكون اتجاه الإجهاد موازيا للسطح.

تُعرف الموائع التي تنطبق عليها المعادلة أعلاه بأنها موائع نيوتونية (**Newtonian Fluids**). فلقد افترض العالم الانجليزي نيوتن هذه العلاقة عام **1687** م. إذا أثرت قوة على مائع فإن المائع لا يمكنه مقاومة الاجهاد دون أن يتحرك. يكون الإجهاد العمودي (σ_{ii}) للمائع المتحرك غير متساو على جوانب المائع. وفي هذه الحالة يكون الضغط هو متوسط هذا الإجهاد، أي

$$P = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right) = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

ويكون

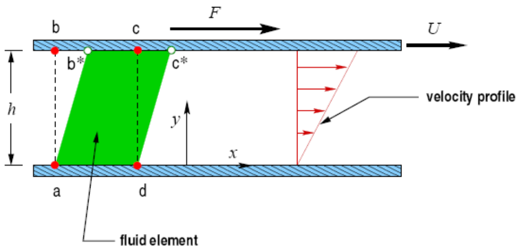
$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

لقد توصل العالم ستوكس تجريبياً إلى أن قوة الاحتكاك (الزوجة) التي تعانيها كرة نصف قطرها r عندما تسقط بسرعة v في مائع معامل لزوجته η هي

$$F = 6\pi\eta r\,\mathrm{v}$$

عندما يتعرض مائع الى قوة خارجية تحدث له تشوهات (اجهاد قص)، بينما يقاوم الصلب هذه التشوهات. كما موضح في الشكلين ادناه.

سلوك الصلب والمائع عند تعرضهما لإجهاد قص



سلوك مائع يتحرك بين لوحين متوازيين

مثال (6):

تنساب طبقة من ماء لزوجته $1.12\times10^{-3}\,N\,s/m^2$ إلى أسفل سطح مستوى مائل بسرعة

$$v=2\left(\frac{2y}{h}-\frac{y^2}{h^2}\right)$$

أوجد اتجاه ومقدار إجهاد القص (**Shear Stress**) الذي يؤثر به الماء على السطح، إذا كان $h=0.1m$.

الحل

يُعطى إجهاد القص بالعلاقة

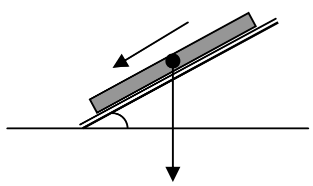
$$\tau=\eta\frac{dv}{dy}$$

وبالتعويض عن $y=0$ عند السطح نحصل على

$$\tau=2\eta\left(\frac{2}{h}-2\frac{y}{h^2}\right)=2\eta\left(\frac{2}{h}-2\frac{0}{h^2}\right)=\frac{4\eta}{h}=\frac{4(1.12\times10^{-3})}{0.1}=0.0448\,N/m^2$$

مثال (7):

ينزلق لوح أبعاده $1m\times1m$ ووزن $25N$ إلى أسفل مستوى مائل بزاوية 20^0 بسرعة $2\,cm/s$ ، كما موضح في الرسم أدناه. يفصل اللوح عن السطح غشاء من زيت لزوجته $0.05\,N\,s/m^2$. أوجد سمك هذا الغشاء.



الحل

بتحليل قوة الوزن في اتجاه المستوى نحصل على $W\sin 20 = 25\sin 20$ والذي يعادل قوة اجهاد القص $F = \tau A = \eta \frac{d\mathrm{v}}{dy} A$. إذاً $25\sin 20 = \eta \frac{d\mathrm{v}}{dy} A$ حيث dy هو سمك الغشاء و $d\mathrm{v}$ فرق السرعة (مع العلم ان المستوى الأسفل ساكن). بالتعويض نحصل على

$$dy = \frac{\eta\, d\mathrm{v}}{25\sin 20} A = \frac{0.05(0.02)}{25(0.34)} 1\times 1 = 0.00017\, m = 0.117\, mm$$

مثال (8):

يُعطى توزيع سرعة مائع لزيت خام لزوجته $\eta = 0.02\, N\, s/m^2$ بالعلاقة

$$\mathrm{v} = 100\, y(0.1 - y)$$

اذا كانت المسافة بين اللوحين تساوي $0.01m$ ، أحسب مقدار اجهاد القص عند الجدران.

الحل

$$\tau = \eta \frac{d\mathrm{v}}{dy} = \eta(10 - 200y)$$

عند الجدران $y = 0$ و $y = d = 0.01$ وبالتالي يكون اجهاد القص على الترتيب،

$$\tau_1 = \eta(10 - 200y) = 0.01(10 - 0) = 1 N/m^2$$

و

$$\tau_2 = \eta(10 - 200y) = 0.01(10 - 200(0.01)) = 0.08\, N/m^2$$

مثال (9):

يُعطى توزيع سرعة مائع لزج لزوجته $\eta = 0.04\, N\, s/m^2$ ينساب بين لوحين متوازيين بالعلاقة

$$\mathrm{v} = -\frac{1}{2\eta} C(Ly - y^2)$$

حيث $L = 4cm$ المسافة بين اللوحين و $C = -1.5 kN/m^3$. احسب مقدار السرعة واجهاد القص عند $y = 1.2cm$.

الحل

$$\mathrm{v} = -\frac{1}{2\eta} C(Ly - y^2)$$

يُعطى اجهاد القص بالعلاقة

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dy}} = -\frac{1}{2} C(L - 2y)$$

اذا كانت $y = 0.012\,m$ فإن

$$\mathrm{v} = -\frac{1}{2(0.04)} \left(-1.5(10^3)[0.04(0.012) - (0.012)^2] \right) = 6.3\ m/s$$

واجهاد القص

$$\tau = -\frac{1}{2} C(L - 2y) = -\frac{1}{2} (-1.5 \times 10^3)[0.04 - 2(0.012)] = 12\ N/m^2$$

مثال (10):

يُعطى توزيع سرعة مائع لزج لزوجته η ينساب إلى جهة اليمين بين لوحين متوازيين، اللوح الأعلى متحرك إلى اليسار بسرعة v_0 والأسفل ساكن، بالعلاقة

$$\mathrm{v} = -\frac{B}{2\eta} (Hy - y^2) + \mathrm{v}_0 \frac{y}{H}$$

حيث H المسافة بين اللوحين و B ثابت. هل يكون اجهاد القص أكبر عند اللوح المتحرك ($y = H$) أم اللوح الساكن ($y = 0$)؟

الحل

يُعطى اجهاد القص بالعلاقة

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{dv}}{dy} = -\frac{B}{2} (H - 2y) + \frac{\mathrm{v}_0}{H}$$

عند اللوح الساكن $y = 0$ وبالتالي

$$\tau = -\frac{B}{2} H + \frac{\mathrm{v}_0}{H}$$

وعند اللوح الأعلى المتحرك، $y = H$ وبالتعويض نحصل على

$$\tau = -\frac{B}{2} (H - 2H) + \frac{\mathrm{v}_0}{H} = \frac{BH}{2} + \frac{\mathrm{v}_0}{H}$$

وعليه يكون الاجهاد عند اللوح الأعلى أكبر من عند اللوح الأسفل، إذا كانت $B > 0$.

مثال (11):

يملأ زيت خروع المسافة بين أسطوانتيت متمركزتين قطراهما $0.2m$ و $0.1m$ بارتفاع مقداره $0.1m$. أحسب مقدار عزم القوة اللازم لتدوير الأسطوانة الداخلية بسرعة زاويّة مقدارها $12rpm$ بحيث تظل الأسطوانة الخارجية ساكنة في موضعها.

الحل

تُعطى السرعة المماسية للأسطوانة بالعلاقة

$$v = r\,\omega = 0.1 \times 2\pi(\frac{12}{60}) =$$

ويُعطى عزم القوة بالعلاقة

$$\tau = \ell\,F = \ell(\eta\frac{\Delta v}{\Delta r}) = \frac{2\pi^2(0.1)^3 h(0.986)(0.4)}{h} = 0.0078\,Nm$$

حيث $\Delta r = h$.

(د) عدد رينولدز (Reynolds Number)

يُعتبر هذا العدد ذو أهمية في دراسة وتصنيف الموائع. يُعبر هذا العدد عن نسبة القوة القصورية إلى قوة اللزوجة، أي

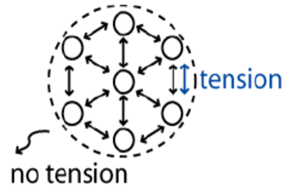
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\,\mathrm{v}\,D}{\eta}$$

حيث D تُمثل بُعد طول مناسب للمائع و v سرعته و η معامل لزوجته الحركية. يحدد هذا العدد عمّا إذا كانت حركة طبقات المائع صفائحية (**Laminar**) أم مضطربة (**Turbulent**).

(هـ) معامل التوتر السطحي (Surface Tension)

عند الحد الفاصل بين السائل والغاز يلعب التوتر السطحي دوراً هاماً. فإذا نظرنا إلى جزيئات السائل عند السطح وبداخله، لرأينا أن الجزيئات على السطح ممسوكة بقوى إلى أسفل فقط بينما الجزيئات في الداخل ممسوكة بقوى في كل الاتجاهات، وبالتالي تكون متزنة. تنشأ قوة التوتر السطحي نتيجة للاختلاف بين قوى التماسك (**Cohesive Forces**) بين جزيئات السائل مع بعضها البعض وقوى الالتصاق (**Adhesive Forces**) بين جزيئات السائل وجدار الأنبوبة وجزيئات الهواء المحيط بالسائل أيضا. ولهذا السبب يكون سطح السائل متوترا (مشدوداً). وبسبب هذه الخاصية يتخذ سطح

السائل الشكل المقعر والمحدب. وبفضل هذه الخاصية يمكن لبعض الحشرات أن تتحرك بسهولة على هذا السطح المشدود دون أن تغرق.



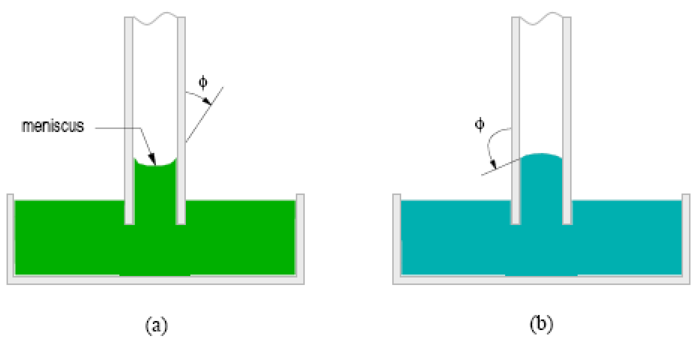
نُعبّر عن مقدار التوتر بمقدار القوة الواقعة على طول المحيط حول السائل. ونكتب معامل التوتر على الصورة

$$\gamma = \frac{F_t}{L}$$

يقاس معامل التوتر السطحي بوحدة $[\gamma] = N/m$ أو $[\gamma] = J/m^2$.

ترتفع السوائل في الأنابيب الضيقة بسبب هذه الخاصية. وتتوقف عندما يساوي وزن عمود السائل قوة الجاذبية. ولأنبوبة نصف قطرها r مملوءة بسائل كثافته ρ ، نجد أن $F = mg = \rho V$ حيث $V = \pi r^2 A$ و $L = 2\pi r$ وبالتالي فإن $mg = F_t = L\cos\phi$ حيث نحصل

$$\gamma \cos\phi = \frac{\rho \pi r^2 g}{2\pi r}$$



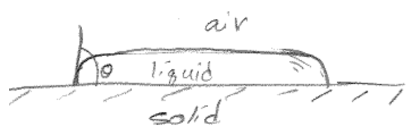
يوضح الشكل تقوس (تحدب وتقعر) السوائل في الأنابيب

ومنها نحصل على العلاقة

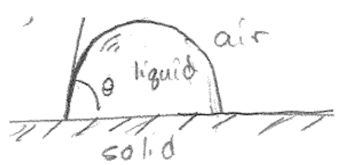
$$h = \frac{2\gamma \cos\phi}{\rho g r}$$

حيث ϕ هي زاوية التماس (**Angle of Contact**). نلاحظ من هذه العلاقة أن السائل يرتفع أكثر كلما كان نصف قطر الأنبوبة صغيراً، أي $h \propto \dfrac{1}{r}$. ويزيد الارتفاع h أيضا كلما قلت كثافة السائل. يمكن استخدام هذه المعادلة لقياس كثافة السوائل (معرفة اللبن المغشوش، مثلاً).

إذا كان $h = 2r$ فإن $2r = \dfrac{2\gamma}{\rho g r}$ ومنها نُعرف العدد $B_0 = \dfrac{\rho g r^2}{\gamma}$ والذي يُعرف باسم عدد بوند (**Bond Number**). إذا كان $B_0 >> 1$ يكون تأثير الجاذبية أكبر ويصبح تقوس (**Meniscus**) سطح السائل منبسطا تماماً. أما إذا كان $B_0 << 1$ فيصبح تأثير الخاصية الشعرية أكبر ويتقوس السطح فيصير نصف كروي.



و



والآن بوضع عدد بوند مساوياً للوحدة نحصل على طول معياري ($r = L_C$) للسائل، أي

$$B_0 = \frac{\rho g L_C^2}{\gamma} = 1$$

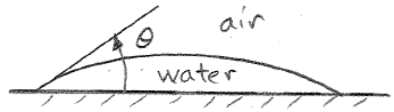
حيث نحصل على

$$L_C = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

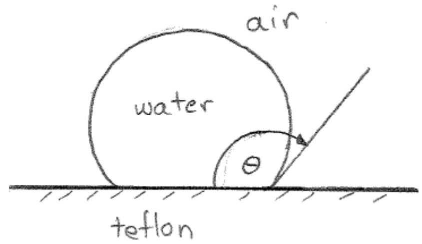
والذي يُعرف بطول الشعرية (**Capillary Length**)، وتكون عنده الخاصية الشعرية مهمة. يمكن كتابة عدد بوند على الصورة $B_0 = \left(\dfrac{r}{L_C}\right)^2$.

يمكن تفسير تكور قطرات الماء الساقطة بسبب التوتر السطحي، حيث يفضل السائل أن يكون له أقل سطح ممكن. إذا كانت زاوية التماس $0 < \theta < 90^0$ فإن قوة التماسك أقل من الإلتصاق ونقول بأن السائل لا يبلل السطح أما إذا كانت $90^0 < \theta < 180^0$ فإن السائل يبلل السطح. فالزئبق مثلا لا تلتصق جزيئاته مع السطح للسبب المذكور أعلاه.

عند وضع ماء على سطح معدن أو زجاج نقي يأخذ الشكل المجاور



أما في حالة وضع الماء على التيفلون (**Teflon**) فيكون شكل الماء على الصورة أدناه.

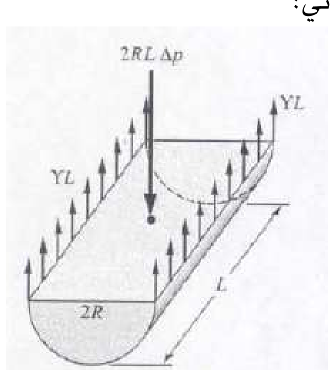


يُعرف السائل الأول بإسم (**Hydrophilic**) والثاني (**Hydrophobic**).

فقاعات الهواء (Air Bubbles)

تتكون فقاعات الهواء بسبب قوة التوتر السطحي. للفقاعات الكروية يُحدد استقرارها بناء على العلاقة بين ضغطها الداخلي والخارجي ونصف قطر تكورها.

(أ) القوى داخل سائل اسطواني:



عند الإتزان نجد أن

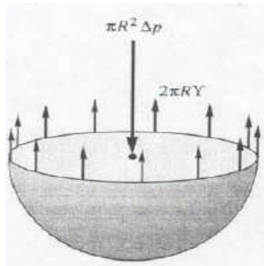
$$2\gamma L = 2(P_i - P_0)RL$$

حيث R نصف قطر قاعدتها، P_i ضغطها الداخلي و P_0 ضغطها الخارجي و L طولها.

ويكون فرق الضغط، $\Delta P = P_i - P_0$ ،

$$\Delta P = \frac{\gamma}{R}$$

(ب) القوى داخل قطرة كروية:



عند الاتزان نجد أن

$$2\pi R\gamma = \pi R^2 (P_i - P_0)$$

حيث R نصف قطرها و P_i ضغطها الداخلي و P_0 ضغطها الخارجي. ويكون فرق الضغط

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R}$$

وعموما لأي سطح فاصل نجد أن

$$\Delta P = \gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

حيث R_1 , R_2 نصفا قطر تكور السطحين.

مثال (12):

أحسب أكبر قوة تكفي لرفع سلك في شكل حلقة قطرها $0.04m$ من سطح الماء.

الحل

تُعطى القوة بالعلاقة

$$F = 2(2\pi R\gamma)\cos\theta$$

وتكون أكبر ما يمكن عند $\theta = 0$ ، أي $F = 4\pi R\gamma = 0.0366N$.

مثال (13):

ماهو قطر قطرة ماء فرق الضغط بين داخلها وخارجها يساوي $10^3\,Pa$؟

الحل

$$R=\frac{2\gamma}{\Delta P}=\frac{2(0.072)}{10^3}=1.44\times10^{-4}\,m$$

مثال (14):

مُلئ صهريج بفقاعات ماء نصف قطر كل منها يساوي r. ما هو مقدار أقل شغل يجب بذله ليزيد الضغط داخل الصهريج بمقدار ΔP؟

الحل

يُعطى الشغل بالعلاقة

$$W=\int\ \Delta P\,dV=\int_{r_0}^{r_f}\frac{2\gamma}{r}4\pi r^2dr=4\pi\gamma(r_f^2-r_0^2)<0$$

وهو مقدار سالب لأن نصف قطر الفقاعة ينقص مع زيادة الضغط.

(و) الحرارة (Enthalpy)، h وهي علاقة تُعبر عن الطاقة الداخلية وكثافة وضغط المائع، وتُعطى بالعلاقة $h=\frac{P}{\rho}+u$. عندما ينخفض ضغط السائل دون ضغط البخار يتبخر السائل ويصبح غاز. إذا كان هذا الانخفاض بسبب تغير درجة الحرارة، تُعرف هذه الظاهرة بالغليان، أما إذا كان الانخفاض بسبب التغير في السرعة فتُعرف بإسم **(Cavitation)**. وتُعطى بالعلاقة

$$Ca=\frac{P_0-P_v}{\frac{1}{2}\rho\,\mathrm{v}^2}$$

حيث P_v هو ضغط البخار و v السرعة الاعتبارية للسائل.

(ي) الطفو (Buoyancy).

وجد العالم اليوناني أرشميدس أن وزن الجسم في السائل أقل من وزنه في الهواء. وتوصل إلى أنه إذا غُمر جسم جزئياً أو كلياً في مائع فإن الجسم يلقى دفعاً من أسفل إلى أعلى مساوياً لوزن المائع المُزاح. وزن المائع المُزاح الذي كثافته ρ_f هو $W=m\,g=(\rho_f\,V)g$. إذاً فإن قوة الطفو $F_B=(\rho_f\,V)g$ حيث V هو حجم المائع المزاح وهو نفس حجم الجسم المغمور. إذا كانت كثافة جسم أقل من كثافة المائع الموضوع فيه الجسم فإن الجسم يطفو في المائع. وإذا كانت كثافة الجسم أكبر من كثافة المائع فإن الجسم

يغطس في المائع. وبفضل قوة الطفو تحلق المناطيد في الهواء والسفن في البحار. وتطفو السفن في البحار وذلك بجعل كثافتها الفعّالة (**Effective**) أقل من كثافة الماء بجعل حجمها أكبر ما يمكن.

مثال (15):

ما هو أقل حجم لمنطاد يكفي لرفع شخص كتله $100\,kg$؟

الحل

توجد هنا ثلاثة قوى هي: قوة وزن الشخص $m\,g$ إلى أسفل وقوة الطفو F_B الى أعلى وقوة وزن الهليوم $m_{He}g$ إلى أسفل. وعند الاتزان نحصل على

$$F_B = m_{He}g + mg$$

حيث $m_{He} = \rho_{He}Vg$ و $F_B = \rho_{air}Vg$ وبالتعويض نحصل على

$$V = \frac{m}{(\rho_{air} - \rho_{He})} = \frac{100}{1.24 - 0.29} = 19\,m^3$$

مثال (16):

هل تستقر اسطوانة مادتها متجانسة قطر قاعدتها $3m$ وطولها $6\,m$ ووزنها $24.5\,kN$ على زيت كثافته $\rho = 900\,kg/m^3$؟

الحل

إذا كان طول الأسطوانة الذي تطفو عليه هو x فإن حجم الجزء المغمور V_d يكون

$$V_d = \frac{\pi}{4}D^2x$$

وتكون قوة الطفو

$$F_B = \rho\,gV_d = (900)(9.8)\frac{\pi}{4}D^2x = 24.5\,kN$$

وبالتعويض عن $D = 3m$ نحصل على

$$x = \frac{24500}{(900)(9.8)\frac{\pi}{4}(3)^2} = 3.9\,m$$

ويكون مركز الطفو (C_b) على مسافة $y_{CB} = \frac{3.9}{2} = 1.95\,m$ أسفل قاعدة الأسطوانة.

أما مركز الثقل (C_g) فيكون على مسافة $\frac{L}{2} = \frac{6}{2} = 3m$ من قاعدة الأسطوانة، وبم

أن $C_g > C_b$ لابـد أن نحـصل علـى المـسافة MB حيـث MB حيـث $y_{MC} = y_{CB} + MB$ ، حيـث
$MB = \frac{I}{V_d} = \frac{3.98}{27.6} = 0.144m$ و $I = \frac{\pi}{64}D^4$.

إذاً فــــإن $y_{MC} = y_{CB} + MB = 1.95 + 0.144 = 2.09 < 3m$ ، $y_{MC} < y_{CG}$ ، فــــإن الأسطوانة لا تكون مستقرة على الزيت.

مثال (17):

يطفو ربع جسم على هيئة مكعب في سائل. ما هي كثافة المكعب؟

الحل

تُعطى قوة الطفو بالعلاقة

$$F_B = \rho_w Vg = \rho_w(\frac{3}{4}h \times h \times h)g = \rho_w \frac{3}{4}h^3 g$$

ووزن المكعب

$$F_B = -\rho_{cube} h^3 g$$

وعند الاتزان نجد ان

$$F_B + F_W = 0 \ , \quad \rho_w \frac{3}{4}h^3 g = \rho_w h^3 g$$

وبالتالي فإن

$$\rho_{cube} = \frac{3}{4}\rho_w$$

تمرين:

يطفو شخص كتلته $60kg$ على الماء باتزان بنسبة $x = 0.9$ (من الحجم) مـن جسمه مغمور جزئياً. أوجد حجم الشخص الكلي. إذا تنفس الشخص فجأة حجما مقداره $2000cm^3$ من الهواء وغطس قليلا إلى أسفل. ما هي قيمة x الجديدة عندما يتزن مرة أخرى. قبل أن يصل الشخص للاتزان فإنه يرتفع وينخفض في صورة حركة توافقية بسيطة. ما هو الزمن الدوري لهذه الحركة التوافقية؟