جميع تخصصات الحاسب

مبادئ الرياضة الرقمية

مبادئ الرياضة الرقمية

4

اسم الوحدة: مبادئ الرياضة الرقمية

الجدارة: معرفة مفهوم الدالة وأنواعها وبعض الدوال العددية المشهورة والقدرة على تمثيل منحنياتها، ومعرفة مفهوم الخوارزمية والقدرة على حساب تعقدها وبعض الخوارزميات المشهورة.

الأهداف: بعد دراسة هذه الوحدة يكون للمتدرب القدرة على:

- تحديد مجال الدوال ومداها وأنواعها وتركيبها.
- تصنيف الدوال العددية المشهورة.
- حساب الدوال العددية الهامة في الحاسب.
- تحويل المسائل إلى خوارزميات.
- حساب تعقد خوارزمية ما.
- تحليل الخوارزميات المشهورة للبحث والترتيب.

الوقت المتوقع للتدريب: عشر ساعات.

الفصل الأول: الدوال

استخدمت الدوال منذ القدم ولكنها لم تدرس كمفهوم رياضي إلا حديثا.

ومن تطبيقاتها: الدوال العددية المشهورة التي تدخل في كثير من القوانين التجريبية، وكذلك الدوال الخاصة بالبرمجة في الحاسوب.

وقد سبق أن درس المتدرب مفهوم الدالة ومنحناها في المقرر 113 ريض ولهذا سنبدأ هذا الفصل بمراجعة سريعة لذلك من خلال تمارين، ثم نضيف بعض الفقرات المفيدة لمتربي الحاسب.

1. مراجعة:

تعريف 1: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y ، أي أنه من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

حيث أن $f(x)$ يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x .

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق والمجموعة Y مجموعة الوصول والعنصر $y = f(x)$ صورة x بواسطة الدالة f والعنصر x أصل $y = f(x)$ بواسطة الدالة f ونقول بأن $f(x)$ غير معرفة في Y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من Y أي أن $f(x)$ غير موجود في Y .

نرمز لهذه الدالة بالرمز: $f : X \to Y$

تجدر الإشارة إلى أن كل عنصر من مجموعة المنطلق له صورة واحدة على الأكثر، بينما قد يكون هناك عنصر من مجموعة الوصول له عدة أصول.

تعريف 2: مجال الدالة f (أو مجموعة تعريفها) هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة الدالة، ومدى الدالة f هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الوصول والتي لها أصول بواسطة الدالة.

يرمز لمجال الدالة f بالرمز D_f ولمداها بالرمز R_f .

تعريف 3: تكون دالتان f و g متساويتان إذا تحقق ما يلي:

$$1)\ D_f = D_g$$
$$2)\ x \in D_f \Rightarrow f(x) = g(x)$$

نرمز لذلك بالرمز: $f = g$.

تعريف 4: لتكن لدينا الدالتان $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$

تركيب هاتين الدالتين $g \circ f$ هو دالة من X إلى Z بحيث: $g \circ f(x) = g[f(x)]$

مثال 1 : احسب في كل مما يلي $g \circ f$ و $f \circ g$:

1) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = x+1 \qquad g: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ g(x) = x^2$

2) $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = x+1 \qquad g: \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ g(x) = x^2$

3) $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ f(x) = \sqrt{x} \qquad g: \mathrm{N} \to \mathrm{N},\ g(x) = x^2$

4) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ f(x) = \sqrt{x} \qquad g: \mathrm{R} \to \mathrm{R},\ g(x) = x^2$

الحل:

1) $g \circ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[x+1] = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$f \circ g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث: $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = x^2 + 1$

2) $g \circ f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[x+1] = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$f \circ g: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث: $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = x^2 + 1$

3) $g \circ f: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = (\sqrt{x})^2 = x$

$f \circ g: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ حيث: $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = \sqrt{x^2} = |x| = x$ لأن x عدد طبيعي وقيمته المطلقة تساويه.

4) $g \circ f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = (\sqrt{x})^2 = x$

$f \circ g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ حيث: $f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^2] = \sqrt{x^2} = |x|$ لأن x عدد حقيقي وقيمته المطلقة قد لا تساويه.

نظرية 1 : تركيب الدوال تجميعي ولكن ليس تبديليا.

تعريف 5: الدوال العددية هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية.

منحنى الدالة :

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يسمى بالمستوى الديكارتي وذلك بإتباع الخطوات التالية:

1) إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها وقيم $y = f(x)$ الموافقة لها.

2) رسم النقاط (x, y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

3) وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة...

وهذا التمثيل يعطي لنا جزءا مما يسمى منحنى الدالة.

تعريف 6: نقول عن دالة إنها:

1) فردية إذا كان: $f(-x)=-f(x)$ أو $f(-x)+f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

2) زوجية إذا كان: $f(-x)=f(x)$ أو $f(-x)-f(x)=0$ من أجل أي $x\in D_f$ و $-x\in D_f$.

الدوال الجبرية:

تعريف 7: الدوال الجبرية هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة.(المطولة)

وهي نوعان: كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط، والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضا.

ومن الدوال الجبرية: الدالة الثابتة والدالة الخطية والدالة التآلفية والدالة التربيعية والدالة الكسرية.

الدوال غير الجبرية:

أما الدوال غير الجبرية فمنها: الدوال المثلثية والدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية.

تمارين

تمرين 1: بَيّن بأن كلا من العلاقات التالية دوال:

$$1)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=x^3 \qquad 2)\ f:\mathrm{N}\to\mathrm{N},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^3+1 \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}-1$$

تمرين 2: حدد مجال كل دالة من التمرين 1 ومداها:

تمرين 3: احسب تركيب $g\circ f$ و $f\circ g$ في كل مما يلي:

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x} \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^2$$

$$2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^x \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x^2$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=x+1 \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}$$

$$4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x| \qquad g:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\sqrt{x}$$

تمرين 4: هل كل مما يلي دالة فردية أم زوجية أم غير ذلك؟

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\ln 2x \qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|} \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$$

تمرين 5: صنف كلا من الدوال السابقة في التمارين 1 إلى 5 (من بين الدوال العددية المشهورة):

تمرين 6: مثل كلا من الدوال التالية:

$$1)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\ln 2x \qquad 2)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$$

$$3)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=e^{|x|} \qquad 4)\ f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ f(x)=|x|$$

تمرين 7: احسب كلا مما يلي:

$$1)\ \log_3 10 \qquad 2)\ \log_2 16 \qquad 3)\ \log_{10} 360=\log 360 \qquad 4)\ \log_{\sqrt{2}} 50$$

2. بعض الدوال العددية الهامة في الحاسب:

دالة الجزء الصحيح الأصغر: ويرمز لها بالرمز: $\lfloor\ \rfloor$ وهي معرفة كما يلي: $\lfloor\ \rfloor:\mathrm{R}\to\mathrm{Z}$ حيث: $\lfloor x\rfloor$ هو أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x .

مثال 2:

$$\lfloor 3.14\rfloor=3,\quad \lfloor\sqrt{5}\rfloor=2,\quad \lfloor -8.5\rfloor=-9,\quad \lfloor 7\rfloor=7,\quad \lfloor -4\rfloor=-4$$

دالة الجزء الصحيح الأكبر: ويرمز لها بالرمز: $\lceil\ \rceil$ وهي معرفة كما يلي: $\lceil\ \rceil:\mathrm{R}\to\mathrm{Z}$ حيث: $\lceil x\rceil$ هو أصغر عدد صحيح لا يقل عن x .

مثال 3:

$$\lceil 3.14\rceil=4,\quad \lceil\sqrt{5}\rceil=3,\quad \lceil -8.5\rceil=-8,\quad \lceil 7\rceil=7,\quad \lceil -4\rceil=-4$$

دالة الجزء الصحيح: ويرمز لها بالرمز: INT وهي معرفة كما يلي: $\mathrm{INT}:\mathrm{R}\to\mathrm{Z}$ حيث: $\mathrm{INT}(x)$ هو الجزء الصحيح لـ x .

مثال 4:

$$\mathrm{INT}(3.14)=3,\quad \mathrm{INT}(\sqrt{5})=2,\quad \mathrm{INT}(-8.5)=-8,\quad \mathrm{INT}(7)=7,\quad \mathrm{INT}(-4)=-4$$

دالة القيمة المطلقة: ويرمز لها بالرمز: $|\ |$ وهي معرفة كما يلي: $|\ |:\mathrm{R}\to[0,\infty)$ حيث: $|x|$ هو قيمة x دون إشارته.

مثال 5:

$$|3.14|=3.14,\quad |\sqrt{5}|=\sqrt{5},\quad |-8.5|=8.5,\quad |7|=7,\quad |-4|=4$$

دالة باقي القسمة: ليكن لدينا عدد طبيعي m وعدد صحيح k . نعرف $k \ (\text{mod } m)$ ونقرأ k تردد m على أنه عدد طبيعي هو باقي قسمة k على m .

مثال 6: باقي القسمة محصور دوما بين 0 و $m-1$:

$$25\ (\text{mod } 7) = 4, \quad 25\ (\text{mod } 5) = 0, \quad 35\ (\text{mod } 11) = 2, \quad 3\ (\text{mod } 8) = 3,$$
$$-26\ (\text{mod } 7) = 2, \quad -371\ (\text{mod } 8) = 5, \quad -39\ (\text{mod } 3) = 0, \quad -3\ (\text{mod } 8) = 5$$

مثال 7: الساعة عبارة عن تطبيق لدالة باقي القسمة على 12 أو 24.

$$10 + 20\ (\text{mod } 24) = 6$$

أي أنه إذا كانت الساعة الآن العاشرة صباحا فستكون السادسة صباحا بعد عشرين ساعة.

تمارين

تمرين 1: احسب كلا مما يلي:

1) $\lfloor 15.23 \rfloor, \quad \lfloor \sqrt{2} \rfloor, \quad \lfloor -\pi \rfloor, \quad \lfloor 27 \rfloor, \quad \lfloor -4.1 \rfloor$

2) $\lceil 15.23 \rceil, \quad \lceil \sqrt{2} \rceil, \quad \lceil -\pi \rceil, \quad \lceil 27 \rceil, \quad \lceil -4.1 \rceil$

3) $\text{INT}(15.23), \quad \text{INT}(\sqrt{2}), \quad \text{INT}(-\pi), \quad \text{INT}(27), \quad \text{INT}(-4.1)$

4) $|15.23|, \quad |\sqrt{2}|, \quad |-\pi|, \quad |27|, \quad |-4.1|$

تمرين 2: احسب كلا مما يلي:

1) $13\ (\text{mod } 24), \quad 13\ (\text{mod } 12), \quad 31\ (\text{mod } 11), \quad 31\ (\text{mod } 32),$

2) $-13\ (\text{mod } 24), \quad -13\ (\text{mod } 12), \quad -31\ (\text{mod } 11), \quad -31\ (\text{mod } 32)$

تمرين 3: إذا كانت الساعة الآن الثامنة مساءً، فكم ستكون بعد:

1) 20 ساعة؟ 2) 31 ساعة؟ 3) 5 ساعة؟

وكم كانت قبل:

4) 15 ساعة؟ 5) 21 ساعة؟ 6) 43 ساعات؟

الفصل الثاني: الخوارزميات

الخوارزميات هي أساس البرمجة في الحاسب. وسنتناول نبذة مختصرة عنها.

1. تعريف الخوارزمية:

تعريف 1: نسمي مسألة كل قائمة منتهية من المعطيات وسؤال متعلق بها. وحل المسألة هو إعطاء جواب لسؤالها مهما تغيرت قيم المعطيات.

مثال 1: نريد أن نحسب قيمة كثير الحدود التالي من أجل $x=5$:

$$f(x)=2x^3-7x^2+4x-15$$

فالمعطيات هنا هي: كثير الحدود $f(x)$ والقيمة المعينة للمتغير $x=5$ ، والسؤال هو: أوجد قيمة $f(5)$.

وحل هذه المسألة هو: $f(5)=80$.

تعريف 2: نسمي حجم معطيات المسألة حجم الحيز الذي تشغله المعطيات في الذاكرة.

مثال 2: نعتبر المسألة السابقة. المعطيات هنا ثابتة فلا نحتاج إلى تخزينها في الذاكرة.

ولكن لو اعتبرنا مسألة أعم منها وهي حساب قيمة كثير الحدود نفسه من أجل أية قيمة ما للمتغير فنحتاج إلى إدخال قيمة المتغير كمتغير حقيقي. وسيكون الحيز الذي يخصص في الذاكرة لتخزين هذا المتغير الحقيقي هو حجم المعطيات.

مثال 3: نعتبر المسألة التالية:

المعطيات: كثير حدود $f(x)$ من الدرجة الثالثة وقيمة معينة للمتغير $x=a$.

السؤال: أوجد قيمة $f(a)$.

فيجب إدخال معاملات كثير الحدود من أصغر درجة إلى أكبرها وهذا يحتاج إلى مصفوفة 1×4 (مثلا) كما أننا نحتاج إلى متغير حقيقي لإدخال قيمة المتغير. فحجم المعطيات سيكون بهذا الترميز هو الحيز الذي تشغله المصفوفة والمتغير الحقيقي.

تعريف 3: نسمي خوارزمية كل قائمة منتهية من الخطوات لحل مسألة ما أي إيجاد جواب للمسألة.

يمكن أن نتصور الخوارزمية كبرنامج حاسب لحل مسألة ما.

مثال 4: نعتبر مسألة المثال 1: يمكن حلها بطريقة التعويض التالية:

$$f(5)=2(5^3)-7(5^2)+4(5)-15=(2\times5\times5\times5)-(7\times5\times5)+(4\times5)-15$$
$$=250-175+20-15=75+20-15=95-15=80$$

احتجنا في هذه الخوارزمية إلى أداء $3+2+1=6$ عمليات ضرب و 3 عمليات جمع.

كما يمكن حلها بطريقة هورنير التالية:

$$f(x)=2x^3-7x^2+4x-15=(2x^2-7x+4)x-15=((2x-7)x+4)x-15$$

ومنه فيكون:

$$f(5)=((2\times5-7)\times5+4)\times5-15=((10-7)\times5+4)\times5-15=(3\times5+4)\times5-15$$
$$=(15+4)\times5-15=19\times5-15=95-15=80$$

احتجنا في هذه الخوارزمية إلى أداء 3 عمليات ضرب و 3 عمليات جمع.

إذن خوارزمية هورنير أسرع من خوارزمية التعويض.من حيث الوقت المستغرق لإعطاء الجواب.

تجدر الإشارة إلى أن التحليل المعطى لكثير الحدود في طريقة هورنير ليس جزءا من الجواب وإنما يوضح صحة الطريقة فقط إذ يمكن تطبيقها مباشرة كالتالي:

الخطوة الأولى: ضرب معامل x^3 في قيمة المتغير.

الخطوة الثانية: إضافة الناتج السابق إلى معامل x^2 .

الخطوة الثالثة: ضرب الناتج السابق في قيمة المتغير.

الخطوة الرابعة: إضافة الناتج السابق إلى معامل x .

الخطوة الخامسة: ضرب الناتج السابق في قيمة المتغير.

الخطوة السادسة: إضافة الناتج السابق إلى المعامل الثابت .

الجواب: الناتج الأخير هو قيمة كثير الحدود عند قيمة المتغير.

فواضح من خطوات الخوارزمية بأننا نحتاج إلى أداء 3 عمليات ضرب و 3 عمليات جمع .فقط.

وهذه الخوارزمية يمكن تطبيقها لحل مسألة المثال 3.

مثال 5**:** نعتبر المسألة التالية:

المعطيات: عددان طبيعيان a و b بحيث $a>b$.

السؤال: ما هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

يمكن أن نحل هذه المسألة بطريقتين مختلفتين:

1) الطريقة المباشرة: نطبق الخوارزمية التالية:

الخطوة الأولى: إيجاد قواسم كل من العددين.

الخطوة الثانية: إيجاد القاسم المشترك الأكبر.

مثلا لو كان $a=258$ و $b=60$ فيكون:

الخطوة الأولى: قواسم $a=258$ هي: $1,\ 2,\ 3,\ 6,\ ....,86,\ 129,\ 258$

وقواسم $b=60$ هي: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30,\ 60$.

الخطوة الثانية: القاسم المشترك الأكبر للعددين $a=258$ و $b=60$ هو: 6 .

2) الطريقة الثانية: نطبق خوارزمية إقليدس التالية:

الخطوة الأولى: نقسم a على b فنتحصل على باقي r_1 .

الخطوة الثانية: إذا كان الباقي يساوي الصفر فإن القاسم المشترك الأكبر هوالمقسوم عليه.

الخطوة الثالثة: إذا لم يكن الباقي يساوي الصفر فنقسم المقسوم عليه على الباقي فنتحصل على باق جديد.

الخطوة الرابعة: نكرر الخطوتين الثانية والثالثة إلى أن نجد القاسم المشترك الأكبر.

مثلا لو كان $a = 258$ و $b = 60$ فيكون:

الخطوة الأولى: نقسم $a = 258$ على $b = 60$ فنتحصل على الباقي: $r_1 = 18$.

الخطوة الثالثة: نقسم $b = 60$ على $r_1 = 18$ فنتحصل على الباقي: $r_2 = 6$.

الخطوة الرابعة: نقسم $r_1 = 18$ على $r_2 = 6$ فنتحصل على الباقي: $r_3 = 0$.

الخطوة الثانية: الباقي يساوي الصفر إذن القاسم المشترك الأكبر هو المقسوم عليه الأخير: $r_2 = 6$.

هذه الخوارزمية منتهية لأن الباقي يتناقص إلى أن يصبح صفرا:

$$a = 258 > b = 60 > r_1 = 18 > r_2 = 6 > r_3 = 0$$

2. تعقد الخوارزمية:

إن تحليل الخوارزميات مهمة رئيسية في علوم الحاسب.. ولمقارنة الخوارزميات يمكن اعتبار عاملين مهمين هما: الفضاء والزمن.

نعني بالفضاء الحيز الذي تشتغله الخوارزمية في الذاكرة فكلما كان صغيرا كلما كان أحسن، رغم أن هذا العامل ليس هو الأهم.

ونعني بالزمن الوقت الذي تستغرقه الخوارزمية لحل المسألة المطروحة فكلما كان الوقت أقصر كلما كانت الخوارزمية أكثر فعالية. وهذا العامل يكاد أن يكون هو الأساسي.

تعريف 4: نسمي تعقد خوارزمية ما عدد العمليات الأساسية التي نؤديها في تنفيذ الخوارزمية وفي أسوأ حالة وذلك بدلالة حجم المعطيات. ومن العمليات الأساسية: المقارنة والمساواة والجمع والطرح والضرب والقسمة.

مثال 6: نعتبر مسألة المثال 3 ونعتبر خوارزمية التعويض لحلها والموضحة في المثال 4. ما هو تعقد هذه الخوارزمية؟

الحل:

نحتاج في هذه الخوارزمية إلى أداء $3 + 2 + 1 = 6$ عمليات ضرب و 3 عمليات جمع، أي أن تعقد الخوارزمية هو: 9 عمليات أساسية.

بينما تعقد خوارزمية هورنير هو: 6 عمليات أساسية.

مثال 7**:** نعتبر المسألة التالية:

المعطيات: كثير حدود $f(x)$ من الدرجة n وعدد حقيقي a .

السؤال: احسب $f(a)$.

ما هو تعقد خوارزمية التعويض لحل هذه المسألة؟ وما هو تعقد خوارزمية هورنير؟

الحل:

1) في خوارزمية التعويض نحتاج إلى أداء $n+(n-1)+\cdots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ عملية ضرب و n عملية جمع

أي أن التعقد هو: $\dfrac{n(n+1)}{2}+n=\dfrac{n^2+n}{2}+n=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n$ عملية أساسية.

2) في خوارزمية هورنير نحتاج إلى أداء n عملية ضرب و n عملية جمع أي أن التعقد هو: $n+n=2n$ عملية أساسية.

ومنه فيمكن أن نقول بأن خوارزمية هورنير أحسن من خوارزمية التعويض.

نسبة التزايد والرمز O الكبير:

لما نقوم بحساب تعقد خوارزمية معينة فإننا لانحتاج إلى كل التفاصيل ولكن يكفي أن نعرف الحد المهيمن في هذا التعقد. وذلك لأننا نريد أن نعرف نسبة التزايد لما يزيد حجم المعطيات. وهذه قيم تقريبية لنسب تزايد بعض الدوال المشهورة:

n	$\log_2 n$	n	$n\log_2 n$	n^2	n^3	2^n
5	3	5	15	25	125	32
10	4	10	40	10^2	10^3	10^3
100	7	100	700	10^4	10^6	10^{30}
1000	10	10^3	10^4	10^6	10^9	10^{300}

وللتعبير عن الحد المهيمن في التعقد نستخدم الرمز O .

مثال 8**:** تعقد خوارزمية التعويض هو: $O(n^2)$ ، بينما خوارزمية هورنير تعقدها هو: $O(n)$.

أي أن نسبة تزايد التعقد بدلالة حجم المعطيات هي من جنس تزايد الدالة المشار إليها.

وبهذه الطريقة، سنعرف مسبقا الخوارزميات التي ستستغرق وقتا معقولا والتي ستستغرق وقتا طويلا جدا وبالتالي فلا فائدة عملية من تنفيذها.

3. بعض الخوارزميات المشهورة:

البحث الخطي:

المعطيات: $DATA$: مصفوفة من n عنصر و $ITEM$: قيمة معينة

السؤال: هل $ITEM$ موجود في $DATA$ وإذا كان نعم فما هو موقعه؟

الخوارزمية: سنجد LOC موقع $ITEM$ في $DATA$ أو نرسل رسالة عدم وجوده.

الخطوة الأولى: نقارن عناصر $DATA$ مع $ITEM$ واحدا واحدا فإن وجدنا عنصرا مساويا له سجلنا موقعه في LOC .

الخطوة الثانية: نرسل رسالة عدم وجود القيمة المطلوبة. إذا لم ننجح في الخطوة الأولى.

تعقد الخوارزمية: في أسوأ حالة، نحتاج في هذه الخوارزمية إلى أداء n مقارنة ومساواة واحدة. إذن تعقد الخوارزمية هو: $O(n)$.

مثال 9: طبق البحث الخطي على المعطيات التالية:

$$DATA=(0,-2,3,15,-7) \qquad ITEM=15$$

الحل:

الخطوة الأولى: نعطي قيمة ابتدائية للمتغير $LOC=1$ ونقوم بالمقارنات التالية:

15 مع 0 : غير متساويين فننتقل إلى العنصر الموالي: $LOC=2$ ؛

15 مع -2 : غير متساويين فننتقل إلى العنصر الموالي: $LOC=3$ ؛

15 مع 3 : غير متساويين فننتقل إلى العنصر الموالي: $LOC=4$ ؛

15 مع 15 : متساويان إذن العنصر موجود وموقعه هو: $LOC=4$.

البحث الثنائي:

المعطيات: $DATA$: مصفوفة من n عنصر مرتبة من أصغرها إلى أكبرها و $ITEM$: قيمة معينة

السؤال: هل $ITEM$ موجود في $DATA$ وإذا كان نعم فما هو موقعه؟

الخوارزمية: تعتمد الخوارزمية على مبدأ "فرّق تسد" كالتالي:

الخطوة الأولى: نقارن العنصر ذا الموقع الوسط $\frac{n+1}{2}$ (إذا كان n فرديا) أو $\frac{n}{2}$ (إذا كان n زوجيا) مع $ITEM$:

إذا كان $ITEM$ يساويه فنتوقف

إذا كان $ITEM$ أكبر منه فنبحث عن $ITEM$ في النصف العلوي المتبقي

إذا كان $ITEM$ أصغر منه فنبحث عن $ITEM$ في النصف السفلي المتبقي

الخطوة الثانية: نكرر الخطوة الأولى بتطبيقها على النصف المتبقي من المصفوفة أي أننا نقارن $ITEM$ مع العنصر ذي الموقع $\frac{high+low+1}{2}$ أو $\frac{high+low}{2}$ (بحسب المجموع فردي أم زوجي) وحيث: $high$ هو موقع أكبر عنصر في المتبقي، و low هو موقع أصغر عنصر في المتبقي..

الخطوة الثالثة: إذا لم نجد $ITEM$ فنرسل رسالة عدم وجوده.

تعقد الخوارزمية: $O(\log_2 n)$.

مثال 10: طبق البحث الثنائي على المعطيات التالية:

$$DATA = (-3,-1,0,4.5,5,10,16) \qquad ITEM = 15$$

الحل:

الخطوة الأولى: نعطي قيمة ابتدائية للمتغيرات $LOC = \frac{7+1}{2} = 4, high = 7, low = 1$ ونقوم بالمقارنة التالية:

15 مع 4.5 : $4.5 < 15$ فننتقل إلى النصف العلوي المتبقي: $LOC = 6, high = 7, low = 5$ ؛

الخطوة الثانية: نقوم بالمقارنات:

15 مع 10: $10 < 15$ فننتقل إلى النصف العلوي المتبقي: $LOC = 7, high = 7, low = 7$ ؛

15 مع 16: $16 > 15$ فنتوقف لأنه لم يتبقى شيء غير مفحوص.

الخطوة الثالثة: 15 غير موجود في $DATA$.

الترتيب البالوني:

المعطيات: $DATA$: مصفوفة من n عدد.

السؤال: رتب عناصر $DATA$ من أصغر عنصر إلى أكبرها.

الخوارزمية: نبحث عن أصغر عنصر ونبادله بأول عنصر، ثم نبحث عن العنصر الذي يليه ونبادله بثاني عنصر وهكذا إلى أكبر عنصر.

تعقد الخوارزمية: في أسوأ حالة، نحتاج لتثبيت أصغر عنصر إلى $n-1$ مقارنة و $3(n-1)$ مساواة أي $4(n-1)$ عملية أساسية.

ولتثبيت العنصر الذي يليه، نحتاج إلى $4(n-2)$ عملية أساسية. وهكذا سنحتاج في الإجمال إلى:

$$4(n-1) + 4(n-2) + \cdots + 4(1) = 4\frac{n(n-1)}{2} = 2n(n-1) = 2n^2 - 2n = O(n^2)$$

مثال 11: طبق الترتيب البالوني على المعطيات التالية:

$$DATA = (16,12,21,-5,-3,11,8)$$

الحل:

الخطوة الأولى: نعطي قيم ابتدائية للمتغيرات:

$$currentMinimum = 16, currentMinLocation = 1, currentLevel = 1$$

ونبحث عن أصغر عنصر:

$DATA$	$currentMinimum$	$currentMinLocation$
12	12	2
21	12	2
-5	-5	4
-3	-3	5
11	-3	5
8	-3	5

إذن أصغر عنصر في هذا المستوى هو: -3 وموقعه هو: 5

نبادل هذا العنصر بالعنصر الأول من هذا المستوى فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$DATA = (-3,12,21,-5,16,11,8)$$

الخطوة الثانية: نعطي قيم ابتدائية للمتغيرات:

$$currentMinimum = 12, currentMinLocation = 2, currentLevel = 2$$

ونبحث عن أصغر عنصر في هذا المستوى:

$DATA$	$currentMinimum$	$currentMinLocation$
21	12	2
-5	-5	4
16	-5	4
11	-5	4
8	-5	4

إذن أصغر عنصر في هذا المستوى هو: -5 وموقعه هو: 4

نبادل هذا العنصر بالعنصر الأول من هذا المستوى وهو العنصر الثاني فتصبح المصفوفة كما يلي:

$$DATA = (-3,-5,21,12,16,11,8)$$

وهكذا إلى أن تصبح المصفوفة كما يلي: $DATA = (-3,-5,8,11,12,16,21)$

تمارين

تمرين 1**:** طبق البحث الخطي على المعطيات التالية:

$$1)\ DATA=(0,89,63,13,5) \qquad ITEM=63$$
$$2)\ DATA=(0,89,63,13,5) \qquad ITEM=13$$
$$3)\ DATA=(0,19,18,23,4) \qquad ITEM=4$$
$$4)\ DATA=(19,-8,7,1) \qquad ITEM=7$$

تمرين 2**:** طبق البحث الثنائي على المعطيات السابقة بعد ترتيب المصفوفات المعطاة.

تمرين 3**:** طبق الترتيب البالوني على المصفوفات المعطاة في التمرين 1.

تمرين 4**:** لتكن لدينا اللعبة التالية بين شخصين:

يختار الشخص الأول رقما طبيعيا بين 1 و 100 ويكتبه على ورقة دون علم الشخص الثاني.

يقترح الشخص الثاني رقما بين 1 و 100.

يجيب الشخص الأول بأحد الأجوبة التالية: 1) وجدت الرقم 2) الرقم المقترح صغير 3) الرقم المقترح كبير.

1) أعط خوارزمية للشخص الثاني لإنهاء اللعبة.

2) ما هو أقصى عدد من المحاولات يحتاج إليها الشخص الثاني لإنهاء اللعبة؟

تمرين 5**:** عبر عما يلي باستخدام رمز O الكبير:

$$1)\ \log 2n \qquad 2)\ n+1 \qquad 3)\ n^2-3n+2 \qquad 4)\ 1-\log_2 n$$
$$5)\ 2^{n+1} \qquad 6)\ n^2+2^n \qquad 7)\ n^2+\log_2 n \qquad 8)\ (2n+1)\log_2 n$$

تمرين 6**:** 1) أعط خوارزمية لإيجاد أصغر عنصر في مصفوفة متكونة من n عدد..

2) حدد تعقد الخوارزمية.