وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة المثنى

كلية العلوم
قسم الرياضيات وتطبيقات الحاسوب

المادة : الميكانيك

السنة الدراسية : الاولى

الفصل الدراسي: الاول

العام الدراسي: 2017/2018

مدرس المادة: م.علي ناظم صبار

مقدمة Introduction

الميكانيك Mechanics أو علم القوى المحركة والساكنة هو فرع من فروع الفيزياء وتدور دراسته حول حركة الاجسام و القوى المؤثرة فيها.

ويتفرع الى خمسة فروع رئيسية:

١- ميكانيك كلاسيكي (Classical Mechanics) ويشتمل على ميكانيك الحركة dynamics وعلم السكون statics والتوازن equilibrium

٢- ميكانيك تحليلي (Analytical Mechan.) ويشتمل على ميكانيك لاكرانج Lagrangian (اعادة صياغة لنظريات الميكانيك الكلاسيكي) وميكانيك هاملتوني Hamiltonian (صياغة نظرية أخرى للميكانيك الكلاسيكي).

٣- ميكانيك نسبي (Relativistic Mech.) ويشمل النسبية الخاصة والنسبية العامة.

٤- ميكانيك الكم (Quantum Mechanics) يهتم بدراسة ميكانيك الجسيمات الصغيرة الذرية ودون الذرية.

٥- ميكانيكا الموائع (Hydrodynamics) يهتم بدراسة حركة الموائع.

وسوف تقتصر دراستنا على الميكانيك الكلاسيكي.

The basic units and Measurement ~~and units~~

الوحدات الاساسية والقياس

١- المسافة (Distance) الوحدة الاساسية لقياس المسافة أو الطول هي المتر (m)

1 Fermi (1F) = 10^{-15} m

1 Angstrom (1 Å) = 10^{-10} m

1 nanometer (1 nm) = 10^{-9} m

1 micrometer (1 μm) = 10^{-6} m

1 Centemeter (1 cm) = 10^{-2} m

1 kilometer (1 km) = 10^{3} m

٢- الكتلة (Mass) الوحدة الاساسية لقياس الكتلة هي الكيلوغرام (Kg) واجزائها كما يلي

1 microgram = 10^{-6} gm = 10^{-9} Kg (μg)

1 milligram = 10^{-3} gm = 10^{-6} Kg (mgm)

1 gram = 10^{-3} Kg

1 ton = 10^{6} gm = 10^{3} kg

٣- الزمن (Time) الوحدة الاساسية لقياس الزمن هي الثانية

1 picosecond (1 ps) = 10^{-12} sec

1 nanosecond (1 ns) = 10^{-9} sec

1 microsecond (1 μs) = 10^{-6} sec

1 millisecond (1 ms) = 10^{-3} sec

1 minute = 60 sec (1 min)

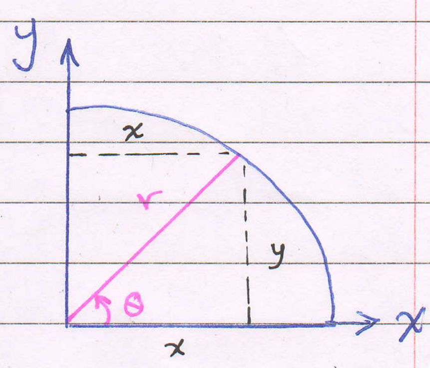
1 hour = 60 min = 3600 sec (1 hr.)

٤- الزاوية (Angle)

يوجد نظامين لقياس الزوايا هما: الدرجات والنصف قطري

Plane angle: There are two system for measuring plane angles: degree and radian.

Degree system (θ°)



$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad , \sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta$$

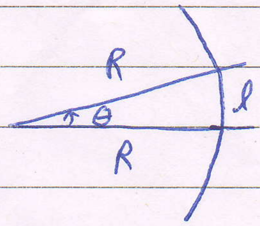
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos\theta$$

$r^2 = x^2 + y^2$ حسب فيثاغورس فإن

$$= r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Radian system (θ rad)



$$\theta_{rad} = \frac{l}{R}$$

$\pi(rad) = 180^\circ$

$1\ rad = \frac{180}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$, $\pi = 3.1416$

$2\pi = 360^\circ$

١-١ - الكميات العددية والمتجهة Scalars & Vectors

- الكميات العددية (Scalars) هي الكميات التي يلزم لتحديدها معرفة مقدارها فقط (اي يذكر عدد يليه وحدة مناسبة) مثل الحجم ودرجة الحرارة والكتلة والزمن و ...

Scalar quantity has only magnitude, eg: time, mass, ...

- الكميات المتجهة (Vectors) هي الكميات التي يلزم لتحديدها معرفة مقدارها واتجاهها وهي لا تخضع للعمليات الجبرية البسيطة بل يستخدم عند جمعها أو طرحها أو ضربها جبر المتجهات. مثل الإزاحة والسرعة والتعجيل والقوة والزخم و ...

Vector quantity has both magnitude and direction, for example: displacement, velocity, force, ...

- يمثل المتجه بسهم (arrow) يبين اتجاهه اتجاه المتجه وطوله يتناسب مع مقدار المتجه مثل $\vec{A}, \vec{B}$ أما مقداره فيمثل بالرمز $|\vec{A}|$ أو بحرف دون سهم A, B.

- وحدة المتجه unit vector (أو متجه الوحدة) هو المتجه الذي مقداره وحدة واحدة. يرمز له $\hat{u}$

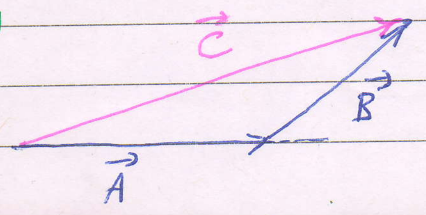
$$\vec{A} = \hat{u}\,|\vec{A}|$$

١-٢ - المحصلة واتجاهها (Resultant and direction)

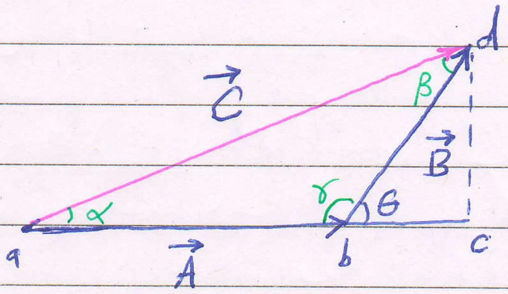
(أ) لإيجاد محصلة (أو مجموع) متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نرسم متجهاً موازياً للمتجه $\vec{A}$ ومساوياً له في المقدار ثم نرسم متجهاً آخر موازياً للمتجه $\vec{B}$ ومساوياً له في المقدار.
ثم نرسم المحصلة $\vec{C}$ من بداية $\vec{A}$ الى نهاية $\vec{B}$

الجمع الاتجاهي يخضع لقانون التبادل

$$\left.\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A}+\vec{B}\\ &= \vec{B}+\vec{A}\end{aligned}\right)$$ Commutative law



ولحساب مقدار المحصلة C أو ($|\vec{C}|$) نرسم الشكل التالي



ومن نظرية فيثاغورس فإن

$$(ad)^2 = (ac)^2 + (dc)^2$$

$$ad = C$$

$$ac = ab + bc \quad , \quad (\text{where } ab = A \quad , \quad \cos\theta = \frac{bc}{B})$$
$$= A + B\cos\theta$$

$$dc = B\sin\theta \quad , \quad (\text{because } \sin\theta = \frac{dc}{B})$$

وبالتعويض في معادلة فيثاغورس

$$C^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$$

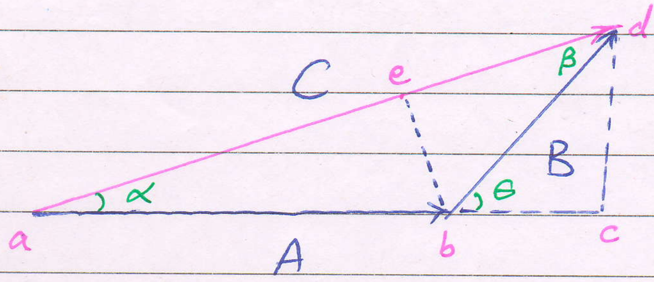
$$= A^2 + 2AB\cos\theta + B^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta$$

$$= A^2 + 2AB\cos\theta + B^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}$$

$$\boxed{C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

تسمى قانون
الجيب تمام

ولمعرفة اتجاه المحصلة C علينا ايجاد الزاوية α في الشكل السابق



١- من المثلث الكبير (acd)

$$\sin\alpha = \frac{cd}{C} \rightarrow cd = C\sin\alpha$$

٢- من المثلث الصغير (bcd)

$$\sin\theta = \frac{cd}{B} \rightarrow cd = B\sin\theta$$

$$\therefore C\sin\alpha = B\sin\theta \rightarrow \frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad \text{-----} \quad ①$$

٣- من المثلثين العلويين abe & dbe

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{eb}{A} \rightarrow eb = A\sin\alpha \\ \sin\beta = \dfrac{eb}{B} \rightarrow eb = B\sin\beta \end{array}\right] \rightarrow A\sin\alpha = B\sin\beta$$

$$\frac{A}{\sin\beta} = \frac{B}{\sin\alpha} \quad \text{---- } (2)$$

من (1) و (2) نجد

$$\frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta}$$

يسمى قانون الجيب

if $\theta + \theta' = \pi$, Then: $\sin\theta = \sin\theta'$

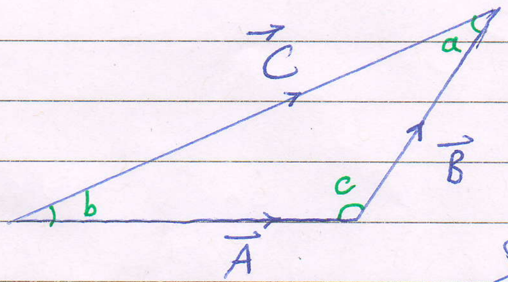
من الشكل نلاحظ:

$\theta + \gamma = \pi$

$$\frac{C}{\sin\gamma} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta}$$

ولسهولة الحفظ يمكن تمثيلها بالشكل التالي:

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

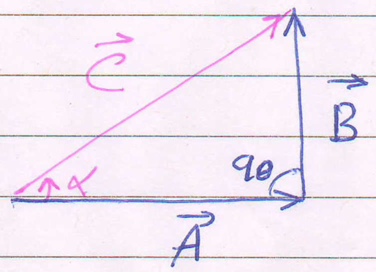


وفي حالة خاصة عندما $\vec{B}$ عمودياً على $\vec{A}$ فإن $\theta = 90°$

$\cos(90) = 0$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{B}{A}$$



ب

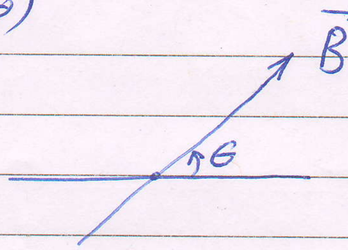
الفرق بين متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يمثل الفرق بين المتجهين (حاصل طرح المتجه $\vec{B}$ من $\vec{A}$) رياضياً كما يلي

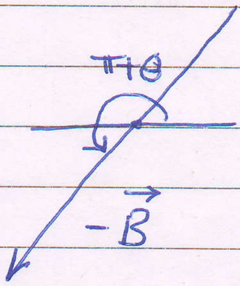
$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$
$$= \vec{A} + (-\vec{B})$$

Difference between two vectors

$-\vec{D} = \vec{B} - \vec{A}$ عملية الطرح عملية غير إبدالية

In plane opposite direction are defined by angles θ and $(\pi+\theta)$

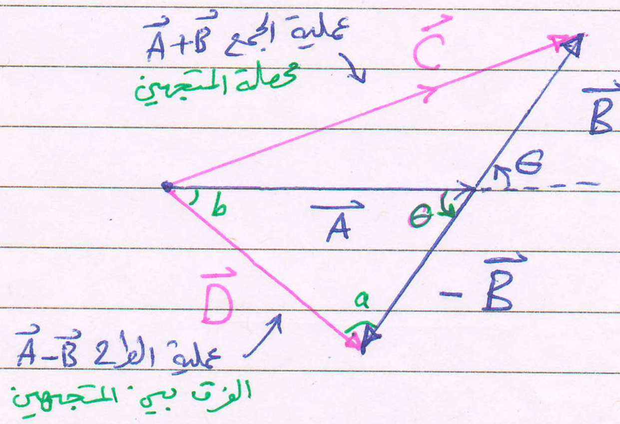




$$\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta)$$

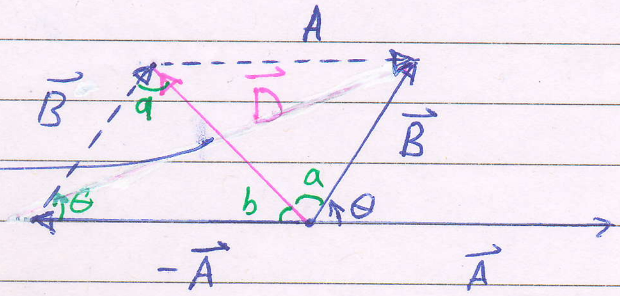
$$\therefore D = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi+\theta)}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$



$-\vec{D} = \vec{B} - \vec{A}$ هنا الشكل يمثل

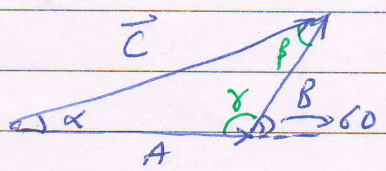
نفس القيمة بعكس الاتجاه.



مثال (1) متجهان الأول 4 units والثاني 3 units فإذا كان المتجه الأول موازياً لمحور x والثاني يصنع زاوية مع المتجه الأول جد المحصلة اذا كانت الزاوية بينهما (180، 0، 90، 60)

Sol

1- $\theta = 60^\circ$

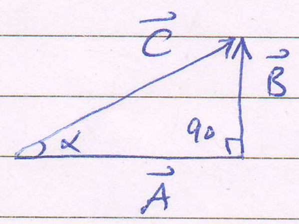


$$C = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + 2(4)(3)\cos(60)} = 6.1 \text{ units}$$

$$\frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} \rightarrow \sin\alpha = \frac{B}{C}\sin\theta = \frac{3}{6.1}\sin(60)$$

$$= 0.43 \rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0.43)$$
$$= 25.5^\circ$$

2- $\theta = 90^\circ$



$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$
$$= 5 \text{ units}$$

$$\tan\alpha = \frac{B}{A} = \frac{3}{4} = 0.75 \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0.75)$$
$$= 36.8^\circ$$

3- $\theta = 0^\circ$

$C = A + B = 4 + 3 = 7$ units

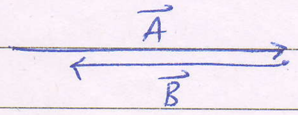
عندما تكون المتجهات بنفس الاتجاه فان المحصلة حاصل جمعهما .

الزاوية صفر

4- $\theta = 180^\circ$

عندما يكون المتجهان على استقامة واحدة ومتعاكسان في الاتجاه فإن المحصلة

$D = A - B = 4 - 3 = 1$ unit



والزاوية صفر

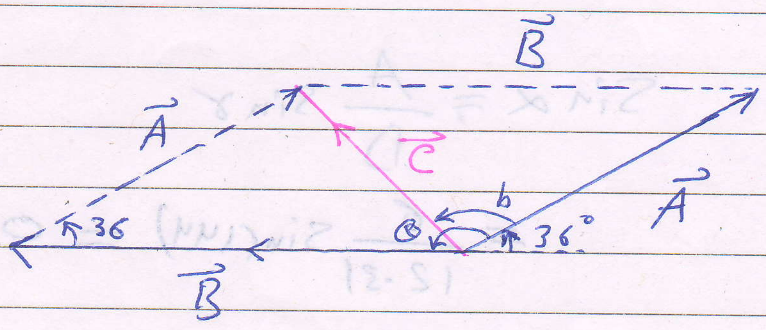
مثال (2) متجهان $\vec{A} = 6$ units ويصنع زاوية $36°$ مع محور x
و $\vec{B} = 7$ units ويتجه بالاتجاه السالب لمحور x جد المحصلة واتجاهها ؟

$\theta + 36° = 180°$

$\theta = 180° - 36°$

$= 144°$

الزاوية بين المتجهين



$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (7)^2 + 2(6)(7)\cos(144)} = 4.13 \text{ units}$$

$$\frac{C}{\sin(36)} = \frac{B}{\sin(b)} \Rightarrow \sin(b) = \frac{B}{C}\sin(36) = \frac{7}{4.13}\sin(36)$$

$$= 0.996 \rightarrow b = \sin^{-1}(0.996) = 85°$$

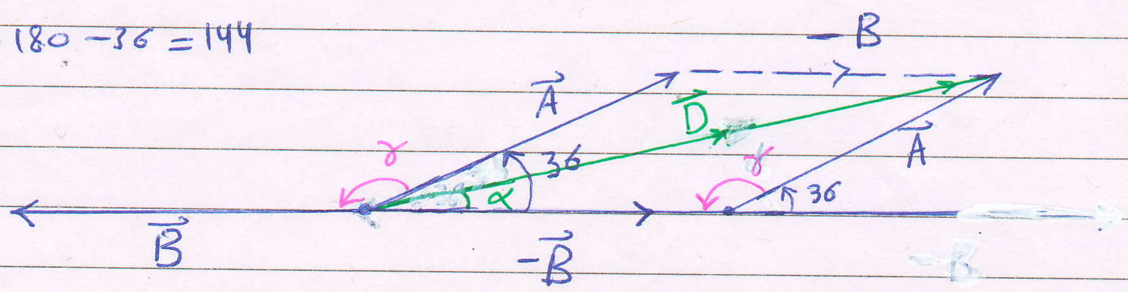
لتكن β هي زاوية المحصلة

$$\beta = 36 + b = 36 + 85 = 121°$$

H.W.

مثال (3) جد الفرق $\vec{D}$ بين المتجهين في المثال اعلاه ؟ واتجاه المحصلة

$\gamma = 180 - 36 = 144$



$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos(\gamma)} = \sqrt{(6)^2 + (7)^2 - 2(6)(7)\cos(144)}$$

$$= 12.31 \text{ units}$$

الاتجاه ←

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{D}{\sin\gamma}$$

$$\sin\alpha = \frac{A}{D}\sin\gamma$$

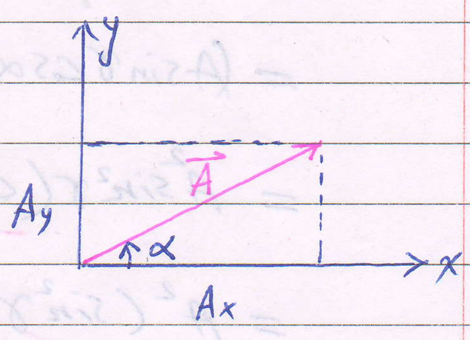
$$= \frac{6}{12.31}\sin(144) = 0.2865$$

$$\alpha = \sin^{-1}(0.2865) = 16.6^\circ$$

١-٣ - تحليل المتجهات (Vector analysis)

إذا كانت المتجه $\vec{A}$ يميل بزاوية α عن الأفق فإن $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y$

من الشكل نلاحظ:



$$A_x = A\cos\alpha$$

$$A_y = A\sin\alpha$$

وحسب فيثاغورس:

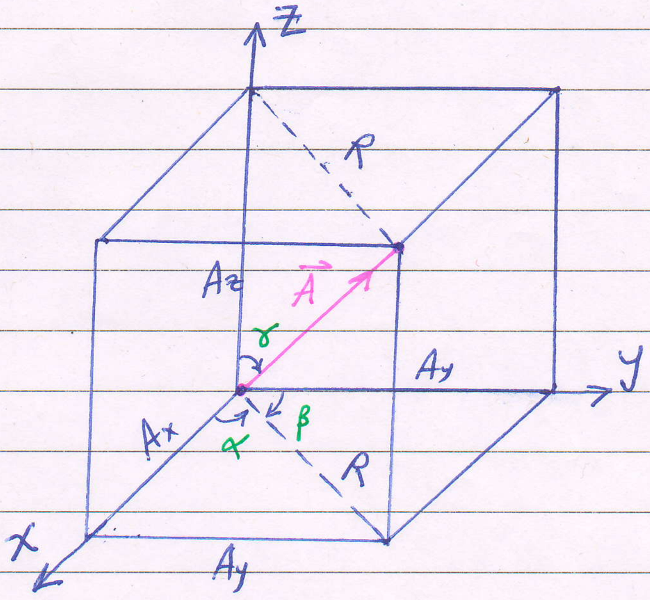
$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{A_y}{A_x}$$

وفي الفضاء الثلاثي الأبعاد:

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



إذا كانت المتجه $\vec{A}$ يصنع زاوية مقدارها γ مع محور z

α مع محور x

β مع محور y

فإن:

$$\sin\gamma = \frac{R}{A}$$

$$\therefore R = A\sin\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A} \rightarrow A_z = A\cos\gamma$$

$$\sin\alpha = \frac{A_y}{R} \rightarrow A_y = R\sin\alpha = A\sin\gamma\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{R} \rightarrow A_x = R\cos\alpha = A\sin\gamma\cos\alpha$$

التحقق من صحة الناتج

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$= (A\sin\gamma\cos\alpha)^2 + (A\sin\gamma\sin\alpha)^2 + (A\cos\gamma)^2$$

$$= A^2\sin^2\gamma(\cos\alpha^2 + \sin^2\alpha) + A^2\cos\gamma^2$$

$$= A^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = A^2$$

١-٤- العمليات الحسابية على المتجهات

١- جمع المتجهات (Addition of Vectors)

ليكن لدينا متجهين

If $\vec{A} = \hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z$

$\vec{B} = \hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k} B_z$, Then:

$$\vec{A} + \vec{B} = \hat{i}(A_x + B_x) + \hat{j}(A_y + B_y) + \hat{k}(A_z + B_z)$$

٢- طرح المتجهات (subtraction of vectors)

$$\vec{A} - \vec{B} = \hat{i}(A_x - B_x) + \hat{j}(A_y - B_y) + \hat{k}(A_z - B_z)$$

مثال: لديك المتجهات الثلاثة التالية:

$\vec{r}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{r}_2 = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{r}_3 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

جد قيمة ما يلي:

① $r_1 + r_2 + r_3$

② $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Sol

① $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = (3+2-1)\hat{i} + (-2-4+2)\hat{j} + (1-3+2)\hat{k}$

$= 4\hat{i} - 4\hat{j}$

$r_1 + r_2 + r_3 = |\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$

$= 5.65$ units

② $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (3-2)\hat{i} + (-2+4)\hat{j} + (1+3)\hat{k}$

$= \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

٣- ضرب المتجهات (Vectors multiplication)

هناك نوعان من ضرب المتجهات : عددي (أو قياسي) (Scalar produ.) واتجاهي (Vector product)

أ- الضرب العددي (أو القياسي) Scalar product (dot product)

ويتضح من الاسم ان الناتج من هذه العملية عبارة عن عدد . لنفرض ان لدينا المتجهات التالية :

$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$$

$$\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$$

فإن حاصل الضرب القياسي سيكون بضرب المركبات المتماثلة ومن ثم جمعها :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

ملاحظة

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

حاصل ضرب المركبات المتشابهة يساوي واحد - وحاصل ضرب المركبات المختلفة يساوي صفر

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$$

وله تعريف آخر : عندما يعرف مقدار المتجه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ والزاوية بينهما θ فإن :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

ملاحظات :

١- عندما يكون المتجهات متعامدان $\theta = 90^\circ$ (Perpendicular) فإن حاصل ضربها القياسي

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

٢- الضرب العددي عملية ابدالية

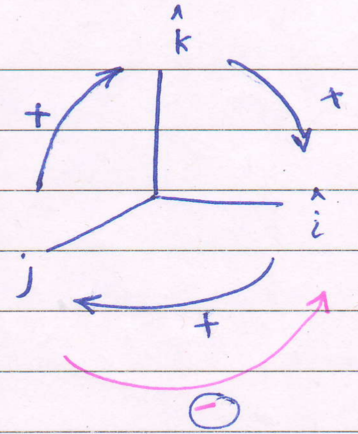
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

ب- الضرب الاتجاهي (Vector product) Cross product

يتضح من الاسم ان الناتج من هذه العملية كمية اتجاهية أو متجه.

ملاحظة :

1) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$
2) $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$
3) $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$
4) $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$



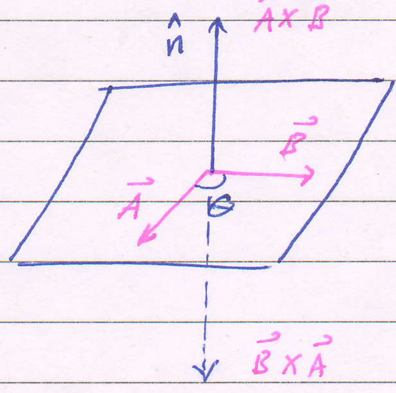
يمثل الضرب الاتجاهي رياضياً كما يلي

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

وله تعريف آخر عندما يعرف مقدار المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ والزاوية بينهما θ

$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \, \hat{n}$ حيث $\hat{n}$ يمثل المتجه العمودي على السطح الذي يحتوي المتجهين المضروبين.



ملاحظات :

١- عندما يكون المتجهين متوازيات Parallel حيث $(\theta = 0)$ فإن حاصل ضربهما الاتجاهي

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$

٢- الضرب الاتجاهي علاقة غير ابدالية $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$

٣- المتجه الناتج عن الضرب سيكون عمودياً على كلا المتجهين.

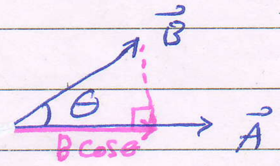
Compar between scalars & vectors مقارنة بين الضرب العددي والاتجاهي

الضرب العددي

١- الناتج كمية عددية

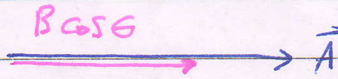
٢- $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

٣-



من حيث المعنى الفيزيائي

قيمة المتجه $\vec{A}$ في المركبة الافقية من قيمة المتجه $\vec{B}$. أي الى اي مدى يكون المتجهان متوازيان (يسير المتجهين في نفس الاتجاه) يقوي أحد المتجهين الاخر



يستخدم في الحركة الخطية

٤- عملية الضرب عملية ابدالية

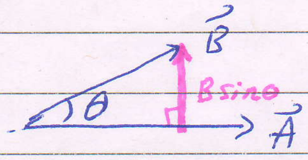
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

الضرب الاتجاهي

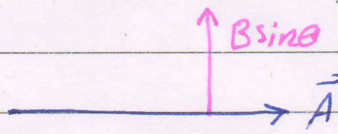
١- الناتج كمية اتجاهية

٢- $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$

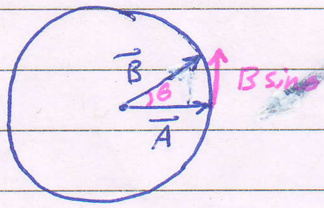
٣-



قيمة المتجه $\vec{A}$ مضروبة في المركبة العمودية من قيمة المتجه $\vec{B}$. أي الى اي مدى يكون المتجهان متعامدان .
يُدوّر أحد المتجهين الاخر.



يستخدم في الآلات الدوارة . في الحركة الدورانية



٤- عملية الضرب عملية غير ابدالية

$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$

الضرب الثلاثي Triple product

أ- الثلاثي النقطي $\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}$

الخواص:

1) $\hat{i}\cdot\hat{j}\cdot\hat{k} = 0$ المركبات المختلفة صفر

2) $\hat{i}\cdot\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{i}$

3) $\hat{j}\cdot\hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{j}$

لكن:

$$\vec{A} = \hat{i}a_1 + \hat{j}a_2 + \hat{k}a_3$$

$$\vec{B} = \hat{i}b_1 + \hat{j}b_2 + \hat{k}b_3$$

$$\vec{C} = \hat{i}c_1 + \hat{j}c_2 + \hat{k}c_3$$

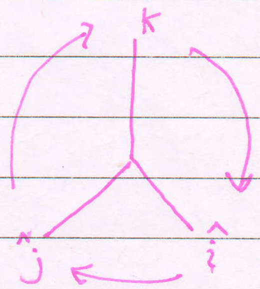
$$\vec{B}\cdot\vec{C} = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3$$
$$= R \quad \text{real number (const.)}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C} = (\hat{i}a_1 + \hat{j}a_2 + \hat{k}a_3)R$$
$$= \hat{i}Ra_1 + \hat{j}Ra_2 + \hat{k}Ra_3$$

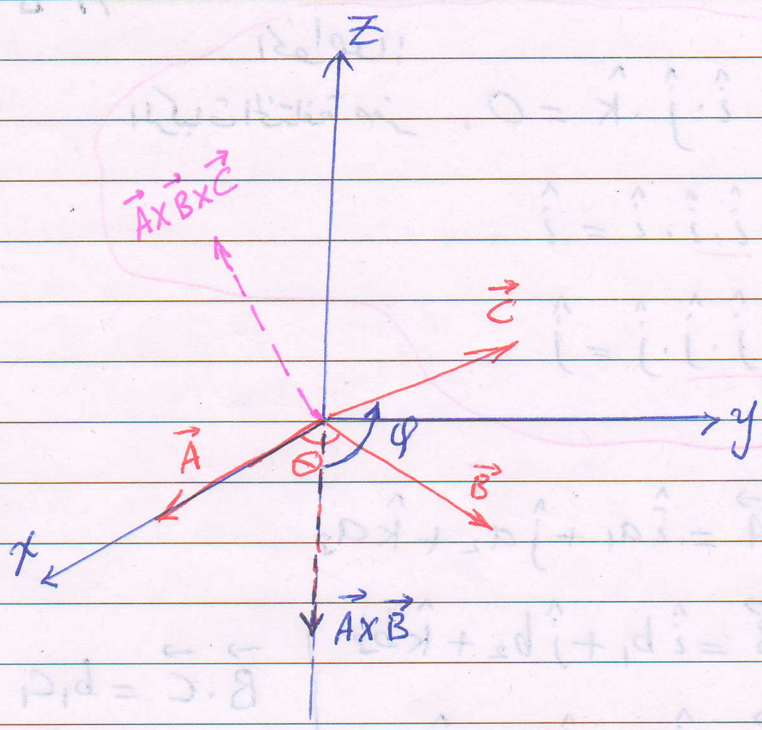
ب- الثلاثي الاتجاهي $\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}$

الخواص:

1) $\hat{i}\times\hat{j}\times\hat{k} = 0$
2) $\hat{i}\times\hat{i}\times\hat{i} = 0$
3) $\hat{j}\times\hat{j}\times\hat{j} = 0$
4) $\hat{i}\times(\underbrace{\hat{k}\times\hat{k}}) = 0$
5) $\hat{i}\times(\underbrace{\hat{k}\times\hat{i}}_{\hat{j}}) = \hat{k}$
6) $\hat{j}\times(\underbrace{\hat{i}\times\hat{j}}_{\hat{k}}) = \hat{i}$



$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})$$ (H.w اثباته)


Z
A⃗×B⃗×C⃗
C⃗
y
φ
θ
A⃗
B⃗
x
A⃗×B⃗

الاثبات ع الطرف الأول

ولايجاد $\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}$

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(b_2c_3 - b_3c_2) + \hat{j}(b_3c_1 - b_1c_3) + \hat{k}(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ (b_2c_3 - b_3c_2) & (b_3c_1 - b_1c_3) & (b_1c_2 - b_2c_1) \end{vmatrix}$$

$$\hat{i}\left(a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\right) +$$

$$\hat{j}\left(a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)\right) +$$

$$\hat{k}\left(a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\right)$$

الطرف الثاني :

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$$

$$\vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) = \hat{i}\,b_1(\cancel{a_1c_1} + a_2c_2 + a_3c_3) + \hat{j}\,b_2(a_1c_1 + \cancel{a_2c_2} + a_3c_3)$$
$$+ \hat{k}\,b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + \cancel{a_3c_3})$$

نختصر القيم المتماثلة

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \hat{i}\,c_1(\cancel{a_1b_1} + a_2b_2 + a_3b_3) + \hat{j}\,c_2(a_1b_1 + \cancel{a_2c_2} + a_3c_3)$$
$$+ \hat{k}\,c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + \cancel{a_3b_3})$$

$$\vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \hat{i}(b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1)$$

$$+ \hat{j}(b_2a_1c_1 + b_2a_3c_3 - a_1b_1c_2 - a_3b_3c_2)$$

$$+ \hat{k}(b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 - c_3a_1b_1 + c_3a_2b_2)$$

نعيد ترتيب القيم بشكل آخر (بأخذ العوامل المشتركة)

$$= \hat{i}\left(a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\right) +$$

$$\hat{j}\left(a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)\right) +$$

$$\hat{k}\left(a_1(b_3c_1 - c_3b_1) - a_2(c_3b_2 - b_3c_2)\right)$$

$$\therefore \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

جـ- الثلاثي المختلط $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

الخواص:

1- $\hat{i}\cdot(\underline{\hat{j}\times\hat{k}}) = 1$

2- $\hat{i}\cdot(\underbrace{\hat{j}\times\hat{j}}_{\text{صفر}}) = 0$

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(b_2c_3 - b_3c_2) + \hat{j}(b_3c_1 - b_1c_3) + \hat{k}(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

الناتج قيمة عددية

أمثلة الفصل الأول

مثال 1 : جد محصلة واتجاه المتجهات التالية :

$\vec{A}_1 = 4\hat{i} - 3\hat{j}$

$\vec{A}_2 = -3\hat{i} + 2\hat{j}$

$\vec{A}_3 = 2\hat{i} - 6\hat{j}$

Sol

$A_x = 4 - 3 + 2 = 3$ units

$A_y = -3 + 2 - 6 = -7$ units

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-7)^2} = 7.616$ units

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-7}{3}\right) = -66.8^\circ$ وهي الزاوية التي يصنعها أكبر $\vec{A}$ مع محور x

مثال 2 : جد الزاوية بين المتجهين

$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (2)(-1) + (3)(1) + (-1)(2) = -2 + 3 - 2 = -1$

$A = |\vec{A}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = 3.74$

$B = |\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = 2.45$

$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{-1}{(3.74)(2.45)} = -0.109 \rightarrow \theta = 96.3^\circ$

مثال (3): جد مساحة متوازي الاضلاع الذي ضلعاه المتجهان

$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

Sol

$$\text{Area} = |\vec{A} \times \vec{B}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(6+1) + \hat{j}(1-4) + \hat{k}(2+3) = 7\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\text{Area} = |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(7)^2 + (-3)^2 + (5)^2} = 9.11 \text{ unit square}$$

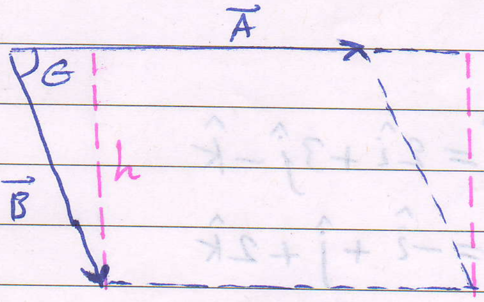
يمكن حل المثال بطريقة أخرى - لإيجاد الزاوية بين المتجهين -

مساحة متوازي الاضلاع = طول القاعدة x الارتفاع

$\text{Area} = Ah$

$h = A\sin\theta$

$\therefore \text{Area} = AB\sin\theta = |\vec{A} \times \vec{B}|$



$A = |\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$B = |\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2)(-1) + (3)(1) + (-1)(2) = -1$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{-1}{(\sqrt{14})(\sqrt{6})} = \frac{-1}{9.165} \Rightarrow \theta = 83.74^\circ$$

بعض قوانين جبر المتجهات

إذا كانت $\vec{A}, \vec{B}, \vec{E}$ دوال متجهة في الفضاء و ϕ و ψ دوال قياسية (عددية) فإن العلاقات التالية تتحقق:

1. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
2. $\vec{B} - \vec{A} = -(\vec{A} - \vec{B})$ $\vec{B} - \vec{A} = -(\vec{A} - \vec{B})$
3. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
4. $\vec{B} \otimes \vec{A} = -\vec{A} \otimes \vec{B} \equiv \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{B} \times \vec{A}$

* كرون تكتب $\times$ أو $\otimes$

5. $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{E}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{E}$
6. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{E}) = \vec{A} \otimes \vec{B} + \vec{A} \otimes \vec{E}$
7. $\psi(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})\psi$
8. $\psi(\vec{A} \otimes \vec{B}) = (\vec{A} \otimes \vec{B})\psi$

تفاضل الكميات المتجهة والقوانين الخاصة بها:

لنفرض أن $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ دوال متجهة قابلة للتفاضل بالنسبة لمتغير مستقل مثل u وأن ϕ دالة قياسية قابلة للتفاضل بالنسبة الى المتغير المستقل u:

$$\vec{A} = \vec{A}(u), \quad \vec{B} = \vec{B}(u), \quad \vec{C} = \vec{C}(u), \quad \phi = \phi(u)$$

1. $\dfrac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du} + \dfrac{d\vec{B}}{du}$
2. $\dfrac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \dfrac{d\vec{B}}{du}$
3. $\dfrac{d}{du}(\vec{A} \times \vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} + \vec{A} \times \dfrac{d\vec{B}}{du}$
4. $\dfrac{d}{du}(\phi \vec{A}) = \phi \dfrac{d\vec{A}}{du} + \dfrac{d\phi}{du} \vec{A}$
5. $\dfrac{d}{du}(\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \dfrac{d\vec{C}}{du} + \vec{A} \cdot \dfrac{d\vec{B}}{du} \times \vec{C} + \dfrac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$