محاضرات

الاستاذ المساعد

موسى مكي كريدي

المرحلة الاولى

تفاضل وتكامل

II

الفصل الدراسي الثاني

٢٠١٦ — ٢٠١٧

المرحلة الأولى

م.م موسى مكي كريدي

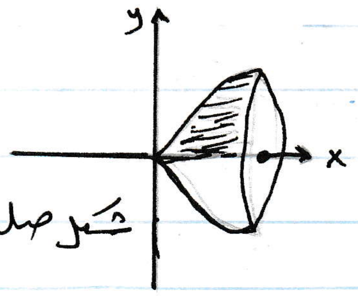
تفاضل وتكامل II

Volume

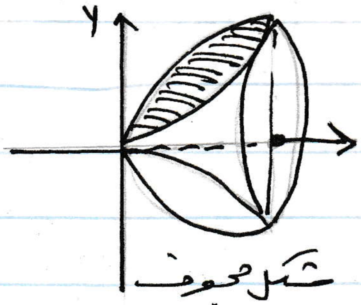
لإيجاد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحنيين حول محور معين نتبع مايلي : لدوران مساحة معينة حول محور معين هناك حالتان تنتجان نوعان من الحجوم

① عندما تكون المساحة مطابقة على محور الدوران (اي لا يوجد فراغ بين المساحه ومحور الدوران) وفي هذه الحاله ينتج لدينا حجم صلد

② اذا كانت المساحه بعيدة عن محور الدوران (اي توجد مسافة بينهما) وفي هذه الحاله ينتج لدينا شكل مجوف



شكل صلد

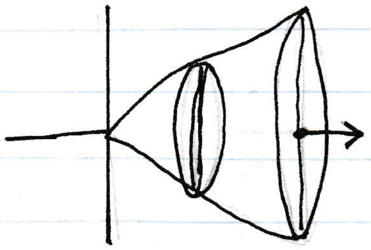


شكل مجوف

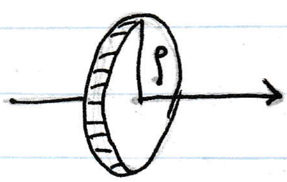
لاستخراج الحجوم الناتجة نستعمل طريقتان :

أ) بأخذ شريحة (على شكل قرص) عمودي على محور الدوران وهذه الشريحة اما ان تكون صلدة (في الحالة الأولى) او تكون مجوفة (في الحالة الثانية) في حالة القرص المجوف يجب ان يقطع هذا القرص المنحنيين في آن واحد اللذين يحددان المساحة واذا لم نستطع عمل هذا الشكل علينا استعمال الطريقة الثانية لإيجاد الحجم.

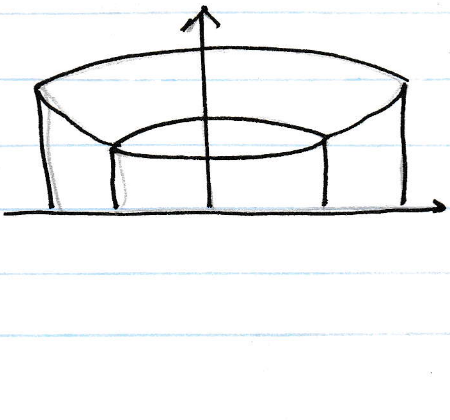
الحالة الأولى



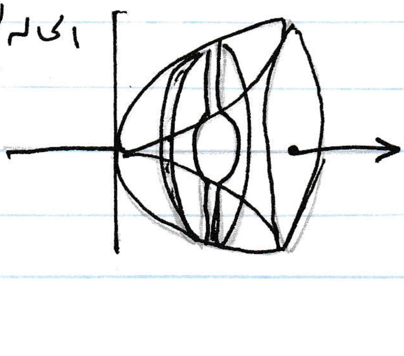
قرص صلد



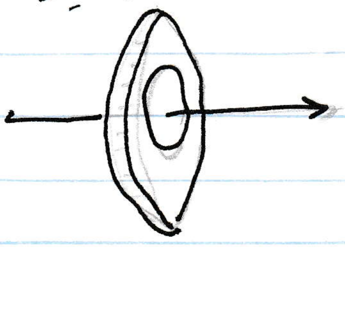
الحالة الثالثة



الحالة الثانية

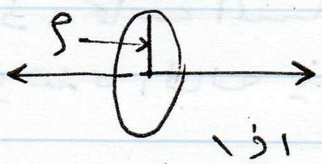


قرص مجوف



في الحالة الثالثة عند اخذ شريحة من الحجم في بعض اجزاء المساحة ، الشريحة واقعة بين منحنيين ، وفي بعض الأجزاء الاخرى فان الشريحة واقعة بين مستقيم ومنحني ، اي لا يمكن اخذ شريحة عمودية من الحجم الصورة عمودية على محور الدوران وفي هذه الحالة يجب ان نستعمل الطريقة الحلقية لايجاد الحجم

في حالة القرص الصلد :



حجم القرص الصلد

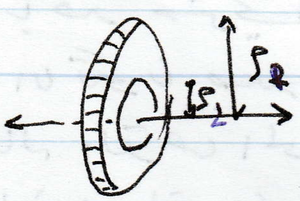
$$V = \pi \rho^2 dx$$

ρ هو بعد المنحني عن محور الدوران و نأخذ dx اذا كان الدوران حول مستقيم يوازي محور السينات و dy اذا كان المستقيم يوازي محور الصادات .

الحجم الكلي الناتج هو

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi \rho^2 dx \quad \text{or} \quad V = \int_{y=c}^{y=d} \pi \rho^2 dy$$

في حالة القرص المجوف :



حجم القرص المجوف

$$V = \pi(\rho_1^2 - \rho_2^2) dx$$

والحجم الكلي هو

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi(\rho_1^2 - \rho_2^2) dx$$

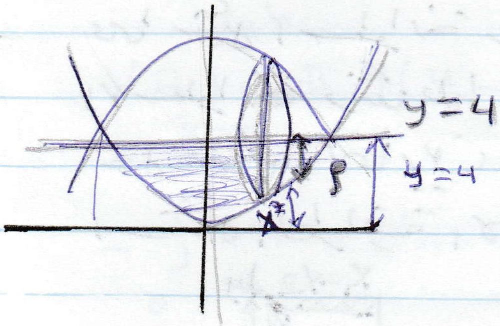
$$\text{or} \quad V = \int_{y=c}^{y=d} \pi(\rho_1^2 - \rho_2^2) dy$$

حيث ρ_1 هو بعد المنحني الأول عن محور الدوران .

ρ_2 هو بعد المنحني الثاني عن محور الدوران . اي اننا استخرجنا الحجم الكلي ناقصا حجم التجويف

Disc Method

Ex: find the volume of solid generated by the area bounded by $y = x^2$ and the line $y=4$ about (1) $y=4$ (2) x-axis.

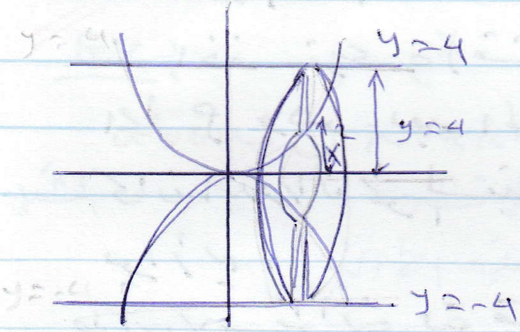


$\rho = 4-x^2$, $\begin{matrix} y=4 \\ y=x^2 \end{matrix} \Rightarrow x^2-4=0$

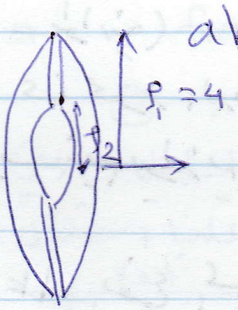
$x = \pm 2$

$$V = \int_{x=-2}^{x=2} \pi \rho^2 dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \pi (4-x^2)^2 dx$$

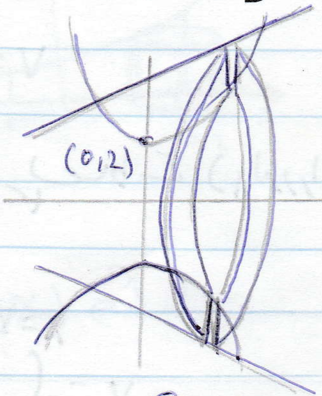


about x-axis (2)



$$V = \int_{x=-2}^{x=2} \pi (\rho_1^2 - \rho_2^2) dx = \int_{-2} \pi (16 - x^4) dx$$

Ex: The region bounded by the curves $y = x^2+2$ and $y = x+8$ is revolved about x-axis. calculate the volume of the solid which is generated.



$\rho_1 = y_1 = x+8$

$\rho_2 = y_2 = x^2+2$

$\Rightarrow x^2+2 = x+8$

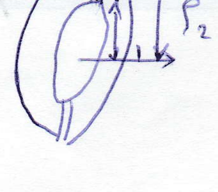
$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x=-2$, $=3$

$(x+2)(x-3)=0$

$$V = \pi \int (y_1^2 - y_2^2) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{3} [(x+8)^2 - (x^2+2)^2] dx = \sim$$

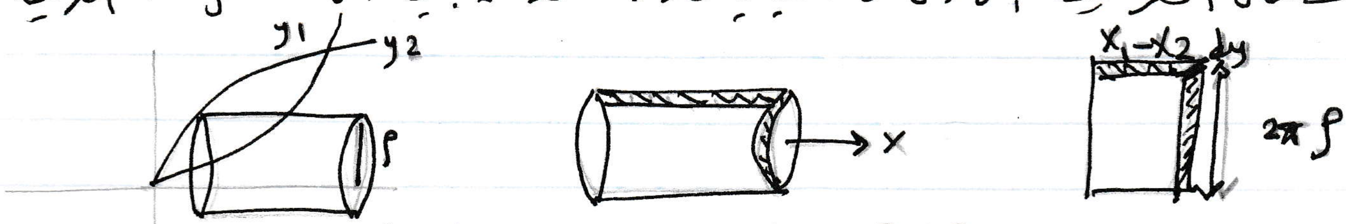
$= 250\pi$



طريقة القشور الأسطوانية

Cylindrical shell method

لإيجاد الحجوم بهذه الطريقة نأخذ شريحة اسطوانية (قشرة اسطوانية) من الشكل الناتج من دوران مساحة حول محور معين، وهذه القشرة تكون حول المحور - أي محور الدوران والذي يكون محور لهذه القشرة التي تكون على شكل اسطوانة رقيقة السمك. لإيجاد الحجم الكلي، نوجد حجم هذه الأسطوانة ونتكاملها ليعطينا الحجم الكلي. ان هذه الطريقة تستعمل لحل معظم التمارين ولكن يجب ان نلاحظ بأنه في بعض التمارين لا يمكن استعمال الطريقة الا لأسباب محددة لذا يجب ان نستعمل هذه الطريقة



عند اخذ شريحة (قشرة اسطوانية)، نفرض نصف قطر الاسطوانة عنه مساويا الى ρ وهو بعد المنحني عن محور الدوران، سمك القشرة هو dy اذا كان الدوران نحو السينات ومستقيم يوازيه او dx ومحور الصادات ومستقيم يوازيه.

طول الاسطوانة يتوقف على نوع المساحة التي عندنا، فاذا كانت المساحة المحصورة بين منحنيين، فان طول القشرة هو x_1-x_2 اذا كان محور الدوران حول مستقيم يوازي محور السينات والطول مساويا الى y_1-y_2 اذا كان محور الدوران حول مستقيم يوازي محور الصادات.

اذا كان الدوران حول مستقيم يوازي محور السينات:

$$V_d = 2\pi\rho(x_1-x_2)dy$$ حجم الاسطوانة

$$V=\int_{y=c}^{d} 2\pi\rho(x_{1}-x_2)dy$$ الحجم الكلي

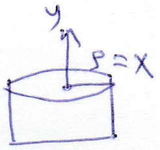
وفي هذه الحالة $\rho = y\pm a$ حيث $y=a$ هو محور الصادات (الدوران)

اذا كان الدوران حول مستقيم يوازي محور الصادات:

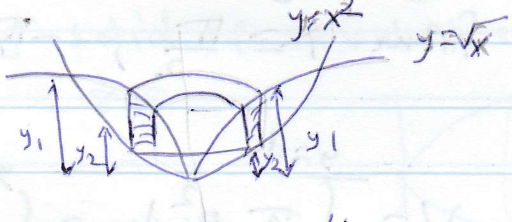
$$V=2\pi\rho(y_1-y_2)dx$$ حجم الاسطوانة

$$V=\int_{x=a}^{x=b} 2\pi\rho(y_1-y_2)dx$$ الحجم الكلي

في هذه الحالة $\rho = x\pm b$ حيث $x=b$ هو محور الدوران.



Ex: let $\mathbb{R}$ be the region bounded by $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$. Find the volume of the solid obtained by revolving R about y-axis.



$$V=\int_{x=a}^{x=b} 2\pi\, \rho (y_1-y_2)\, dx$$

$$=\int_0^1 2\pi\, x(\sqrt{x}-x^2)\, dx$$

$x^2=\sqrt{x} \Rightarrow x^4=x$

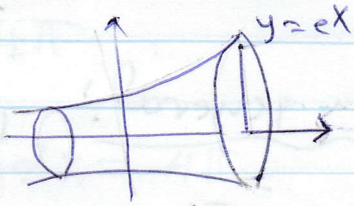
$x^4-x=x\,(x^3-1)=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow x=0,\ x=1$

H-W

Ex: $y=e^x$, $y=0$ from $x=-1$, to $x=1$ about ① x-axis. ② $x=2$



لحل هذا السؤال : لا يمكن اخذ قشرة اسطوانية من الشكل الناتج ولكننا نستعمل الطريقة الاولى

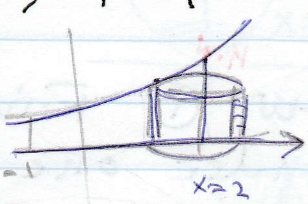
$$V=\int \pi \rho^2\, dx=\int_{x=-1}^{x=1} \pi e^{2x}\, dx=\frac{\pi}{2} e^{2x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}\left[e^2-e^{-2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[e^2-\frac{1}{e^2}\right]=\frac{\pi}{2}\left[7.3-0.13\right]=3.5\pi$$

② about $x=2$, لا يمكن استعمال الطريقة الاولى نستعمل الطريقة الثانية

((لاننا لا نستطيع اخذ شريحة عمودية على محور الدوران))

نأخذ شريحة (قشرة اسطوانية) حول المحور بسمك dx (لان محور الدوران حول السيني توازي محور الصادات) وطول الاسطوانة هو $y_1-0=y_1$ بعد المنحنى عن محور الدوران هو ρ



$$\rho = 2-x$$

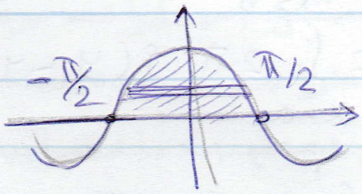
$$V=2\pi\int_{-1}^{1} \rho (y_1-y_2)\, dx=2\pi\int_{-1}^{1} (2-x)\, e^x\, dx$$

H.W

Ex: find the volume of solid generated by revolving the area bounded by $y = \cos x$ from $x = \frac{\pi}{2}, -\pi/2, y = 0$ about y-axis.

الطريقة الأولى!

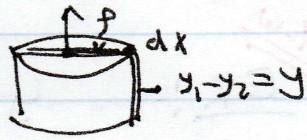
$$V = \int_{y=c}^{y=d} \pi \rho^2 dy = \int_0^y \pi (\cos^{-1} y)^2 dy$$



الطريقة الثانية! القشرة الأسطوانية

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} \rho (y_1 - y_2) dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} x\, y\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$



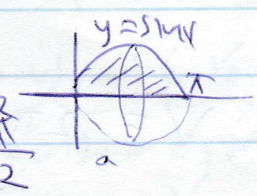
In general! Let f and g be continuous and nonnegative on $[a,b]$, with $f(x) \geq g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$. Then the volume generated by rotating the region bounded by the curves and lines $y = f(x)$ and $y = g(x)$, $x = a$ and $x = b$ around the x-axis is given by

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] \, dx.$$

H.W

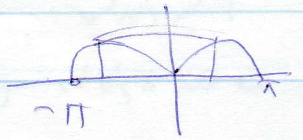
H-W: ① Find the area generated when the area under one loop of the curve $y = \sin x$ between $x = 0$ and $x = \pi$ is rotated about

(a) x-axis (b) y-axis.



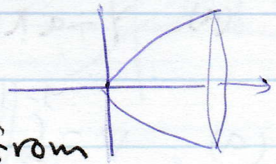
(a) $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2}$

(b) $V = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 2\pi^2$

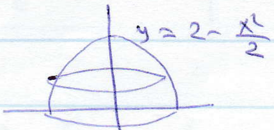


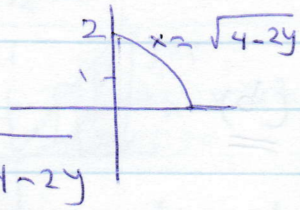
1) Revolve the region under the curve $y=\sqrt{x}$ on the interval $[0,4]$ about the x-axis and find the volume of the resulting solid of revolution.

$$V=\int_0^4 \pi [f(x)]^2 dx = \int_0^4 \pi x\, dx = 8\pi.$$



2) Find the volume of the solid resulting from revolving the curve $y = 2-\frac{x^2}{2}$ from $x=0$ to $x=2$ about the y-axis.





$$y=2-\frac{x^2}{2} = \frac{4-x^2}{2}$$

$$2y = 4-x^2 \Rightarrow 2y-4 = -x^2 \Rightarrow x = \sqrt{4-2y}$$

$$V = \int_0^2 \pi (g(y))^2 dy = \pi\int_0^2 (4-2y)\, dy = 4\pi.$$

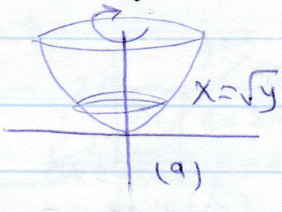
or

$$V = \int_{x=0}^{x=2} 2\pi x f(x) dx = \int_0^2 2\pi x\left(2-\frac{x^2}{2}\right) dx = 4\pi.$$

3) Let $\mathbb{R}$ be the region bounded by the graphs of $y=x^2$, $x=0$, and $y=1$. Compute the volume of the solid formed by revolving $\mathbb{R}$ about

(a) Y-axis (b) X-axis (c) the line $y=2$.

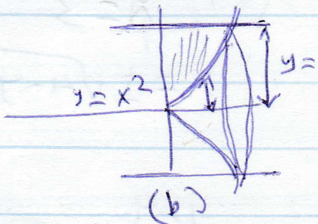
$$V = \int_{y=0}^{y=1} \pi (g(y))^2 dy = \pi\int_0^1 y\, dy = \frac{\pi}{2} y^2\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$



(b)

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \pi (f_1^2 - f_2^2)\, dx = \int_0^1 \pi (1-x^4)\, dx = \frac{4}{5}\pi$$

Washers Method.



(c) about $y=2$

$$V = \int_{x=0}^{x=1} \pi[(2-x^2)^2 - (2-1)^2]\, dx$$

$$= \pi\int_0^1 (2-x^2)^2 dx - \pi\int_0^1 dx = \frac{28}{15}\pi.$$