جامعة المثنى
كلية العلوم
قسم الرياضيات وتطبيقات الحاسوب

التحليل العددي
المرحلة الثالثة
٢٠١ مويد مكي كريدي

التحليل العددي: علم يتعلق باشتقاق ووصف وتحليل طرق الحصول على الحلول العددية التي عادتاً يصعب ايجادها (حلها) بالطرق الرياضية التحليلية المعروفة.

هناك الكثير من المسائل الرياضية التي تواجهنا لا يمكن ايجاد الحلول المضبوطه بالطرق الرياضية المعروفة والنظريات الرياضيه المعتادة، كما نواجه مثلا عند حل بعض المعادلات الجبرية او التكاملات المحدودة او المعادلات التفاضلية الاعتيادية او الجزئية ... الخ. ففي مثل هذه الحالات نبحث عن طرق محددة الخطوات (خوارزمية) للوصول من البيانات المعطاة الى نتائج او حلول عددية تعد تقريبا للحلول المضبوطه اي نتائج تقريبية للحل المضبوط.

من المعروف ان هناك اكثر من طريقة ((خوارزمية)) للوصول الى الحل التقريبي ولغرض المفاضلة بينها للوصول الى افضل خوارزمية هناك عاملان مهمان هما السرعة والدقة، فالسرعة تختص بزمن التقارب الى الحل المطلوب وكلما كان هذا الزمن اقل كانت الطريقة افضل، اما الدقة فهي الفارق بين الحل العددي الذي توصلنا اليه باحد الخوارزميات والحل المضبوط وهذا الفارق يطلق عليه بالخطأ وكلما كان الفارق صغير كانت الطريقة ادق وافضل.

الامثلة التالية توضح متى يمكن ان نبحث عن حل عددي (تقريبي)

1- $x^9 + 3x^5 - 2x + 7 = 0$ (معادلة جبرية)

2- $x^3 \sin x + \ln x = \cos x + 1$ (معادلة متسامية)

3- $\int_1^3 \frac{\cos x}{x}\, dx$

او عند حل بعض المعادلات التفاضلية الاعتيادية او الجزئية بالشروط الابتدائية المحددة

في مثل هذه المسائل نبحث عن خوارزميات وهي طرق محدودة الخطوات للوصول من البيانات المعطاة الى النتائج او حلول عددية تقترب تقريبا للحل المضبوط.

الحل العددي لمسألة ما قد يكون عدداً واحداً ((رقم واحد)) كقيمة تكامل محدود او حل معادلة متسامية او اكثر (كعدة اعداد تمثل جذور تقريبية لمعادلة جبرية))

فالتحليل العددي يتلخص في اشتقاق وتقييم طرق لحساب نتائج عددية مطلوبة من بيانات عددية معطاة، وهذا يجعل التحليل العددي جزءاً من العلم الحديث الذي يسمى ((تشغيل المعلومات)) حيث البيانات المعطاة تمثل المعلومات الداخلة والنتائج المطلوبة تمثل المعلومات المخرجة كما واضح من المخطط التالي:

المعلومات المدخلة Input Information	→	الخوارزمية Algorithm	→	المعلومات المخرجة Output Inform.

في حالة وجود اكثر من خوارزمية نلجأ الى عاملي التفاضل بينهما وهما الدقة والسرعة فالطريقة التي تؤدي الى نتائج ادق اي اخطاء اقل ما يمكن نفضل على غيرها وكذلك الطريقة التي تؤدي نتائج بسرعة اكبر اي تتقارب الى الحل المطلوب في زمن اقل نفضل على غيرها. وعموما توجد عدة اخطاء تؤدي الى خطأ في النتيجة التي نحصل عليها بعد اي خوارزمية.

من المعروف ان المعلومات المدخلة نادراً ما تكون مضبوطة لانها عادة تأتي من اجهزة قياس من نوع الى اخر مختلف وهكذا يصاحب الخوارزمية اخطاء مختلفة ولذلك فالمعلومات المخرجة تشمل على اخطاء من هذين المصدرين وكما موضح في الرسم المخطط التالي

الأخطاء المدخلة input errors ← أخطاء الخوارزمية Algorithm errors ← الأخطاء الخرجة Output errors

ونظراً لأهمية الخطأ في حساباتنا التي تدخل في كل الخوارزميات لذا علينا دراسة الخطأ ومصادره وكيفية معالجته قدر الإمكان لتقليل الخطأ لأقل ما يمكن.

١- أنواع الأخطاء: Types of Errors

بالرغم من ان الطرائق العددية تعطي حلولاً وحيدة لكل عملية تكرارية الا ان هنالك ما نسميه بالأخطاء التي تصاحب كل عملية (خوارزمية) وهي:

١- الخطأ المطلق: absdute error

نفرض ان x^* قيمة تقريبية للقيمة المضبوطة x نعرف الخطأ المطلق بأنه $e_x = \pm(x - x^*)$

٢- الخطأ النسبي: relative error

ويعرف بأنه حاصل قسمة الخطأ المطلق على القيمة المضبوطة أي

$$e_r = \left|\frac{e_x}{x}\right| = \left|1 - \frac{x^*}{x}\right|$$

2- مصادر الأخطاء: Sources of errors

ان الخطأ الحاصل من الحل التقريبي لمسألة ما يكون عادتاً بسبب تراكم عدة أخطاء هذه الأخطاء يمكن ان تصنف الى الآتي:

م- أخطاء الصياغة: Formulation Errors

في معظم التطبيقات الرياضية (فيزياوية او اقتصادية ... الخ) نحاول ان نجعل من النموذج الرياضي نموذجاً مثالياً ومبسطاً يصف المشكلة الأساسية

تعاريف مهمة !
(التدوير)

١- التقريب ! Rounding

يُقرب عدد ما الى عدد (n) من الأرقام المعنوية بجعل جميع الأرقام يمين الموضع رقم n صفرا ، اما الرقم في الموضع رقم n فانه اما ان يترك كما هو دون تغيير او يزداد وحده واحده حسب ما اذا كان الجزء المقتطع اقل او اكبر من نصف وحده في الموضع رقم n . اما اذا كان الجزء المقتطع مساويا بالضبط لنصف وحدة فان الرقم في الموضع n اما يزداد وحده واحده او ان يترك دون تغيير .

بالنسبة للتقريب لعدد n من الأرقام العشرية decimals ! فان الأرقام بعد الموضع رقم (n والتي تجعل كلها اصفارا تحذف .

مثال(1) ! قرب الاعداد التالية

أ- 5234578 لأربعة ارقام معنوية
ب- 854322 لثلاث ارقام معنوية
ج- 3.1415938 لخمسة ارقام عشرية
د- 3.275 لرقمين عشريين

الحل !

أ- 5234000
ب- 854000
ج- 3.14159
د- اما 3.28 او 3.27

٢- العدد صحيح لـ n رقم عشري ! نفرض ان x^* قيمة تقريبية وان x القيمة المضبوطة وان e_x الخطأ المطلق ، يقال ان العدد x صحيح لـ n رقم عشري او (فيه n رقم عشري صحيح) اذا كان

$$|e_x| \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

فالرقم المضبوط $x = 2.4671$ والرقم التقريبي $x^* = 2.4631$

فأن

$$|e_x| = |2.4671 - 2.4631| = 0.004$$

اي ان

$$|e_x| = 0.004 = 0.4 \times 10^{-2}$$
$$< 0.5 \times 10^{-2}$$

اي ان الرقم x صحيح لرقمين عشريين.

اما الرقم $x^* = 2.4620$ فان

$$|e_x| = |2.4620 - 2.4671| = 0.0051$$

$$0.0051 = 0.51 \times 10^{-2} = 0.051 \times 10^{-1}$$

اي ان x^* صحيح لرقم عشري واحد.

3- الرقم المعنوي: Significant digits

نفرض ان x عدد صحيح لـ n رقم عشري. ارقام العدد x التي تحتل المواضع حيث الوحدة اكبر من 10^{-n} تسمى ارقاما معنوية علما بان الاصفار الابتدائية لا تعد.

او بصيغة اخرى:

الرقم المعنوي للعدد التقريبي هو اي رقم لا يساوي الصفر في حالة الكسر العشري او اي صفر يقع بين رقمين معنويين او تستخدم لتحديد المكان. كل الاصفار التي تستخدم لتثبيت الموقع العشري للعدد التقريبي لا تعتبر ارقاما معنوية.

مثال (2): العدد $0.00\underbrace{3050}$ ارقام معنوية

$\underbrace{0.00}$ لتثبيت موقع الفارزة العشرية فقط

4 ارقام معنوية ولكن الرقم

$0.00\underbrace{305}$ يتكون من (3) ارقام معنوية

ارقام معنوية

م. د. سوسن كريدي
كلية العلوم/ جامعة دمشق
قسم الرياضيات والتقانات الحاسوب

الحلول العددية للمعادلات
Numerical solutions of the equations

١. جذور المعادلات: Roots of an equation

يقال ان العدد "r" جذر للمعادلة $f(x)=0$ ⟵ (1)

او صفر للدالة $y=f(x)$ اذا كان $f(r)=0$ ، وهذا هو المعنى الرياضي للجذر اذا ما تم ايجاد الجذور المضبوطة سواء كانت حقيقية ام خيالية وهذا محدود ومختصر على عدد من المعادلات وخاصتا متعددات الحدود ، الا انه في التطبيقات العددية لايمكن بالعادة تحقيق حلا مضبوطا للمعادلة (1) بسبب اخطاء التقريب والسعة المحدودة ولذلك يعرف الجذر بشكل اخر ليكون بالصورة التالية:

يقال ان "r" جذر للمعادلة (1) اذا كان $|f(r)|<\epsilon$ حيث ϵ الخطأ المسموح به وعادتا يكون الرا اصغر من الصفر بقليل.

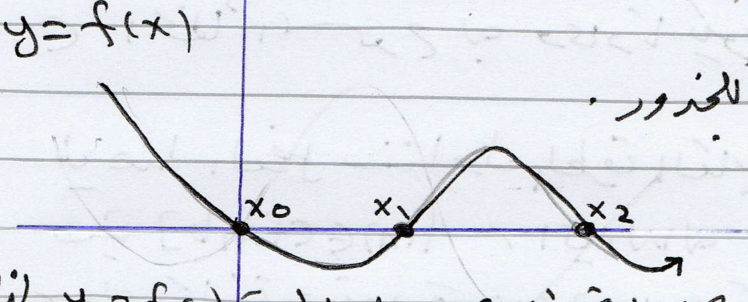
في هذا الفصل سنتناول الطرق القابلة للتطبيق في ايجاد الجذور للمعادلة (1) حيث $f(x)\in C[a,b]$ ، اي الدالة f مستمرة على الفترة $I=[a,b]$ سواء كانت متعددة حدود او متسامية، وبالرغم من ان الطرق المعروفة والتي تستخدم صيغا مباشرة والتي تؤدي الى الحل المضبوط هي طرق لاتطبق الا على عدد محدد جدا من المعادلات والتي تعتبر حالات خاصة ((المعادلات الدرجة الثانية والثالثة مثلا)) ، هذه الطرق والتي تسمى طرق تكرارية تؤدي عادة الى ايجاد جذور قريبة من الجذور المضبوطة وفي بعض الاحيان تؤدي الى الجذر المضبوط ((حالات نادرة)) ، هذه الطرق تفترض وجود قيمة اولية (البدائية) مثل x_0 للجذر المضبوط " r " للمعادلة (1) ثم تكرر عدة مرات للحصول على قيم متتابعة $\{x_n\}$ اقرب الى الجذر المضبوط الى ان تصل الى القيمة المقبولة ((الدقة)) والتي تعتبر شرط اساسي لايقاف عملية التكرار.

يمكن تقسيم عملية ايجاد الجذور للمعادلة $f(x)=0$ (بافتراض ان الجذور الحقيقية) الى مرحلتين اولهما ايجاد المواقع التقريبية للجذور ((التخمينية)) ضمن فترة محددة ما ، والثانية نستخدم هذه القيم للحصول على قيم اقرب الى الجذر الصحيح ضمن الدقة المطلوبة.

2- حساب التقريبات الأولية للجذور.

سنتناول طريقتان لتعيين التقريبات الأولية للجذر وهما:

أ/ تعيين مواقع الجذور بطريقة الرسم البياني: اذا ما تم رسم مخطط الدالة $y = f(x)$ بالطرق الرياضية المعروفة والتي تعلمناها سابقاً في دراستنا فان نقاط تقاطع مخطط الدالة مع المحور $-x$ في النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ تمثل القيم التقريبية للجذر، الدقة في هذه الطريقة لا تتجاوز مرتبتين بعد الفارزة العشرية، لذلك علينا استخدام الطرق الأكفأ لتعيين وحساب الجذر بشكل ادق ويمكن توضيح الطريقة في المخطط (1)



x_2, x_1, x_0 القيم التقريبية للجذور.

في بعض الأحيان قد يواجه الطالب صعوبة في رسم الدالة $y = f(x)$، لذلك يكون من الملائم اعادة كتابة المعادلة (1) بالشكل التالي

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad (2)$$

اي فصل الدالة $f(x)$ الى دالتين بحيث تحقق العلاقة (2) ومن السهولة رسمها، فاذا تقاطع المنحنيان في النقطة (x^*, y^*) فان x^* تعتبر جذراً تقريبياً لمعادلة (1).

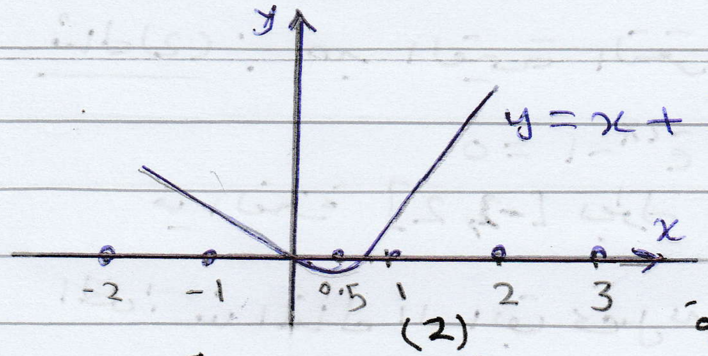
مثال: عين مواقع جذور المعادلة $y = x + e^{-2x} - 1 = 0$ ، بطريقة الرسم.

الحل: نحاول اولا رسم الدالة $f(x)$ في الفترة $[-2, 2]$

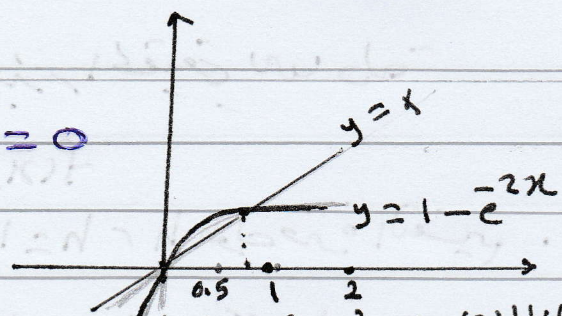
x_i	-2	-1.5	-1	0	0.5	1.5	2
y_i	51.598	17.585	5.389	0	-0.132	0.549	1.018

ثم نسقطها في المستوى xy المتعامد.

الشكل (2)



الشكل (3)



من المخطط (2) واضح ان الجذر r ينتمي للفترة (0.5,1) اي ان اي قيمة $x_r \in (0.5,1)$ هي قيمة تقريبية للجذر r.

يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة التالية:

$$x = -e^{-2x} + 1$$

ثم نرسم الدالتين $f_1(x) = x$ ، $f_2(x) = 1 - e^{-2x}$ لنحصل على الشكل (3) والذي يبين وجود اكثر من تقاطع بين الدالتين. الاول عند النقطة $x_0 = 0$ والثاني $x_1 = 0.7$.

ب/ تعيين مواقع الجذور بطريقة تحليلية (جبرية):

تعتمد هذه الطريقة على التغير الحاصل في الاشارات لقيم الدالة في النقاط x_i ، $i = 0,1,2,\dots$ فاذا كانت

$$f(x_i)\,f(x_{i+1}) < 0$$

فان هناك جذرا بين x_i ، x_{i+1} اي ان موقع الجذر r يكون في (x_i, x_{i+1}) ، $i = 0,1,2,\dots$ وهذا وفق النظرية التالية

نظرية (٧): اذا كانت $f(x)$ دالة حقيقية مستمرة في الفترة $I = [a,b]$ حيث a ، b عددان حقيقيان واذا كانت $f(a)$ ، $f(b)$ مختلفين في الاشارة فانه يوجد في الاقل جذر حقيقي واحد بين a ، b.

مثال(2): جد القيمة التقريبية للجذر الحقيقي للمعادلة

$$f(x) = x + e^{-2x} - 1 = 0$$

في الفترة $[-2, 2]$ بطول $h = 1, 0.5$ ، h طول فترة التقسيم .

الحل: من المثال السابق نحصل على قيم الداله عند النقاط x_i

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	+	+	0	+	+

من خلال القيم اعلاه واضح ان الفترات لا تحتوي على اي جذر تقريبي ، فقط تحتوي على جذر مضبوط واحد $x_0 = 0$.

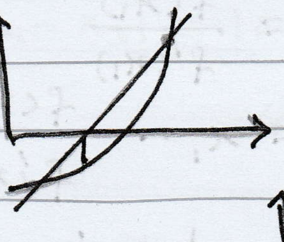
اذا كانت $h = 0.5$ فان قيم الداله $f(x)$ عند x_i تكون

x_i	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y_i	+	+	+	+	0	−	+	+	+

فترة تواجد الجذر هي $(0.5, 1)$ اي ان القيمة التقريبية للجذر تكون ضمن هذه الفترة حصراً" .
يمكن ملاحظة ان اختيار فترة التقسيم صغيرة يؤدي الى زيادة في الحسابات وعدم خسارة اي جذر عكس اذا ما كانت فترة التقسيم h كبيرة والتي تؤدي الى فقدان بعض الجذور .

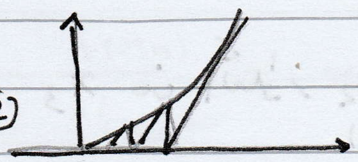
لإيجاد جذور المعادلة $f(x)=0$ بإحدى الطرق التكرارية ،
نبدأ بقيمة ابتدائية x_0 ثم نوجد تقريبات متتالية $\{x_n\}$ أفضل.
الفكرة الأساسية في الطرق التالية هي ان نستبدل المنحني بخط مستقيم مناسب يسهل حساب نقطة تقاطعه مع المحور - x ، هذا المستقيم يمر بالنقطة (x_n, y_n) التي تمثل آخر تقريب تم حسابه ، اما اتجاه المستقيم فيمكن اختياره بطرق مختلفة ، فمثلاً يمكننا ان نحدد اتجاها ثابتا كأن يكون موازيا للقاطع الذي يمر باول نقطتين (x_0,y_0) ، (x_1,y_1) ، او المماس الذي يمر باول نقطة (x_0,y_0) . كما يمكننا ان نختار اتجاها متغيرا كأن يتطابق المستقيم مع القاطع الذي يمر بالنقطتين $(x_i,y_i),(x_{i-1},y_{i-1})$ او المماس الذي يمر باول نقطة (x_0,y_0) . كما يمكننا ان نختار اتجاها متغيرا كأن يتطابق المستقيم مع القاطع الذي يمر بالنقطتين $(x_i,y_i),(x_{i-1},y_{i-1})$ او مع المماس الذي يمر بالنقطة (x_n,y_n) ،
فاذا رمزنا لميل الخط المستقيم بالرمز m ، فيكون هناك عدة احتمالات وكما يلي :

1- القاطع الثابت $m=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

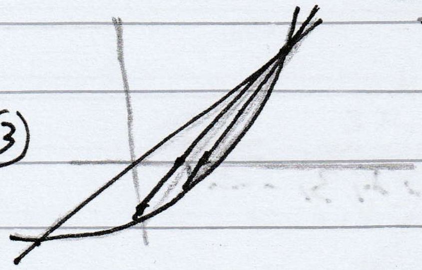


(1)

2- المماس الثابت $m=f'(x_0)$



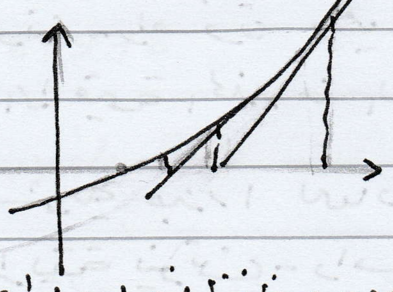
(2)



(3)

3- القاطع المتغير الاتجاه : (طريقة الموضع الكاذب)

4- المماس المتغير الاتجاه : (طريقة نيوتن - رافسون)



(4)

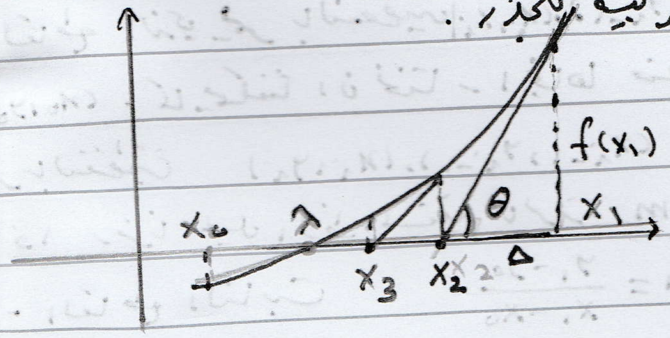
في اي من الحالات اعلاه ، فاننا نحصل على صيغة تكرارية في الصورة التالية :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{m} \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

(2)

طريقة نيوتن - رافسون: (N-R)

تعرف هذه الطريقة بإسم طريقة نيوتن وحل المعادلة $f(x)=0$ بهذه الطريقة نضع المعادلة أعلاه بالصورة الصفرية $f(x)=0$ ونوجد قيمة تقريبية أولية مثل x_0 بالقرب من الجذر المضبوط λ، ثم نوجد التقريبات المتتالية $\{x_n\}$. تعتمد هذه الطريقة على تحديد موقع الجذر في الفترة ولتكن (x_0, x_1) ثم يرسم المماس للمنحني في إحدى النقاط ولتكن $(x_1, f(x_1))$ ويمتد ليتقاطع المحور-x في نقطة ولتكن x_2 كما موضح في الشكل ثم يرسم المماس للمنحني في النقطة الجديدة $(x_2, f(x_2))$ ويمتد ليتقاطع المحور-x في نقطة ولتكن x_3 وهكذا إلى أن نحصل على عدد من القيم x_n والتي تمثل الجذور التقريبية للجذر.



$$f'(x_1) = \tan\theta = \frac{f(x_1)}{\Delta}$$

$$\Delta = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\Delta = x_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبالمثل نحصل على x_3 من الشكل، x_2

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

تسمى هذه العلاقة بعلاقة نيوتن - رافسون وهي أكثر الطرق استخداماً وشيوعاً وأسرعها في الاقتراب إلى قيمة الجذر من الطرق الأخرى.

مثال: اوجد لغاية (٣) عشرية جذراً للمعادلة $x(x^3-1)=10$ بالقرب من $x=2$ بطريقة نيوتن - رافسون

$$x(x^3-1)=10 \Rightarrow x^4-x-10=f(x)=0$$

$$f(x)=x^4-x-10=0 \quad , \quad f(1)=-10, \; f(2)=4$$

فالجذر ينتمي الى الفترة $(1,2)$ لان $f(1)\,f(2)<0$

$$f'(x)=4x^3-1$$

$$x_0=2, \quad x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{4}{31}=1.87096$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.87096-\frac{f(1.87096)}{f'(1.87096)}=1.85578$$

وبالمثل نحسب القيم الاخرى $x_3=1.855585$; $x_4=1.8555845$

ولغرض التوقف يجب ان يتحقق الشرط التالي $e<0.5\times10^{-4}$

$$|x_4-x_3|=|0.0000005|<0.5\times10^{-4}$$

الجذر $\lambda=1.8555845$

او بطريقة اخرى:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^4-x_n-10}{4x_n^3-1}$$

$$=\frac{3x_n^4+10}{4x_n^3-1} \quad , n=0,1,2,3,\dots$$

$$x_1=\frac{3x_0^4+10}{4x_0^3-1} \quad , x_0=2$$

$$=1.87096$$

$$x_2=\frac{3x_1^4+10}{4x_1^3-1}=1.85578$$

ونكرر العملية عدة مرات الى ان نتحقق الشرط المطلوب.

Ex: مثال: H.W

Find by Newten-Rafsan the least root of the eqn. $e^{-x}=\sin x$ for three decimal places.

ملاحظة: في الحالات التي تكون فيها الدالة f متعددة حدود فانه يمكن استخدام طريقة هورنر لحساب قيمة كل من $f(x_n)$ ، $f'(x_n)$ وذلك للحصول على نتائج بسرعة اكبر.

طريقة هورنر: Horner's Method

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد قيمة متعددة الحدود P او مشتقتها P' عند نقطة معينة، كما تستخدم لإزالة الجذور من المعادلات الجبرية وعندئذ تعرف باسم طريقة القسمة التركيبية Method of Synthetic division. وكما موضح في الخطوات التالية

لو كانت لدينا متعددة حدود من الدرجة الثالثة:

$$P_3(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad , \quad x = z_0$$

$$\begin{array}{cccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & z_0 \\ & a_0 z_0 & (a_0 z_0 + a_1) z_0 & [(a_0 z_0 + a_1) z_0 + a_2] z_0 & \\ \hline a_0 & a_0 z_0 + a_1 & (a_0 z_0 + a_1) z_0 + a_2 & [(a_0 z_0 + a_1) z_0 + a_2] z_0 + a_3 & \end{array}$$

او تكتب بشكل اخر

$$\begin{array}{cccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & z_0 \\ & b_0 z_0 & b_1 z_0 & b_2 z_0 & \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & P(z_0) = b_3 \end{array}$$

where $a_0 = b_0 \quad , \quad b_1 = a_1 + a_0 z_0 \; , \; \ldots$

$$b_i = a_i + b_{i-1} z_0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 .$$

Convergence of N–R method — تقارب طريقة (N–R):

نعني بالتقارب هنا تقارب القيم التقريبية المتتالية التي نحصل عليها بالصيغة التكرارية نحو القيمة المضبوطة للجذر.

نفرض ان λ هي القيمة المضبوطة للجذر، اي ان $f(\lambda)=0$

ونفرض ان $f'(\lambda)\neq 0$ وان ϵ_n الخطأ في القيمة التقريبية x_n

$$\epsilon_n = x_n - \lambda \quad \text{———} \; (1)$$

$$\epsilon_{n+1} = x_{n+1} - \lambda \quad \text{———} \; (2)$$

المطلوب معرفة مدى سرعة اتجاه الخطأ ϵ_n نحو الصفر، اي مدى سرعة تناقص هذا الخطأ مع زيادة عدد التكرارات n.

<u>نظرية!</u> في طريقة (N–R)

$$\epsilon_{n+1} \cong \frac{f''(\lambda)}{2f'(\lambda)}\cdot \epsilon_n^2$$

حيث λ القيمة المضبوطة للجذر، ϵ_n الخطأ في القيمة التقريبية.

<u>proof!</u> From (1) & (2), we have

$$x_n = \lambda + \epsilon_n$$
$$x_{n+1} = \lambda + \epsilon_{n+1}$$

From $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, we get

$$\lambda + \epsilon_{n+1} = \lambda + \epsilon_n - \frac{f(\lambda+\epsilon_n)}{f'(\lambda+\epsilon_n)}$$

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n - \frac{f(\lambda+\epsilon_n)}{f'(\lambda+\epsilon_n)} \quad \text{———} \; (*)$$

From Tayler series about $x=\lambda$, we have

$$f(\lambda+\epsilon_n) = f(\lambda) + \epsilon_n f'(\lambda) + \frac{\epsilon_n^2}{2!} f''(\lambda) + \cdots$$

$$f'(\lambda+\epsilon_n) = f'(\lambda) + \epsilon_n f''(\lambda) + \frac{\epsilon_n^2}{2!} f'''(\lambda) + \cdots$$

$$f(\lambda) = 0$$

$$f(\lambda+\epsilon_n) = \epsilon_n f'(\lambda) + \frac{\epsilon_n^2}{2!} f''(\lambda) + \cdots$$

$$= \epsilon_n f'(\lambda)\left[1 + \frac{\epsilon_n}{2!}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

$$f'(\lambda+\epsilon_n) = f'(\lambda)\left[1 + \epsilon_n \frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

$$\frac{f(\lambda+\epsilon_n)}{f'(\lambda+\epsilon_n)} = \epsilon_n\left[1 + \frac{\epsilon_n}{2!}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]\left[1 + \epsilon_n\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]^{-1}$$

$$= \epsilon_n\left[1 + \frac{\epsilon_n}{2!}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]\left[1 - \epsilon_n\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

$$= \epsilon_n\left[1 - \frac{\epsilon_n}{2}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

From (*)

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n - \epsilon_n\left[1 - \frac{\epsilon_n}{2}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\epsilon_n^2}{2}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots$$

$$\epsilon_{n+1} \cong \frac{\epsilon_n^2}{2!}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)}.$$

وهي العلاقة المطلوبة التي توضح مدى تقارب الطريقة ، ويقال ان التقارب هو تقارب تربيعي quadratic convergence وهو يعني ان عدد المراتب العشرية الصحيحة يتضاعف تقريبا مع كل تكرار ، اي ان اذا كان الحل دقيق بمرتبة عشرية في خطوة معينة فيكون دقيق بمرتبتين في الخطوة التالية وبأربع مراتب في الخطوة التي تليها وثمانية في الخطوة اللاحقة وهكذا .

طريقة النقطة الثابتة: Fixed point method

يطلق على هذه الطريقة ايضا طريقة التقريب المتتالي Iteration method

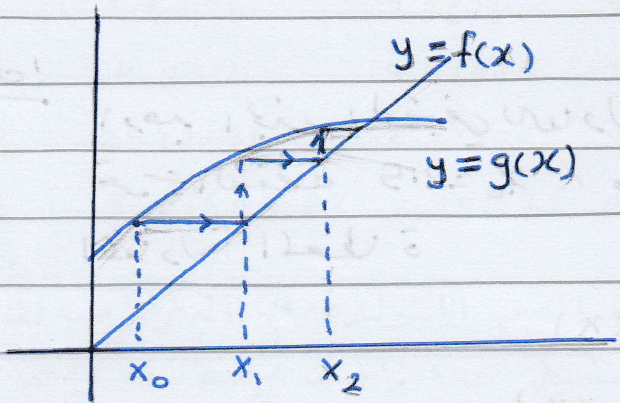
في هذه الطريقة تكتب المعادلة $f(x)=0$ الى شكل مكافئ لها وبالصورة الخاصة وعلى الشكل التالي

$$x = g(x) \quad \text{——} ①$$

ثم استعمل الصيغة التكرارية التالية

$$x_{n+1} = g(x_n) \;,\; n=0,1,2,\dots \quad \text{——} ②$$

في المعادلة ① يكون الطرف الايسر خطا مستقيما والطرف الايمن دالة مختلفة متمثلة بـ $g(x)$ وتكون قيمة الجذر عند تقاطع هاتين الدالتين كما موضح في الشكل (١)



شكل (١) متقاربة نحو الجذر

ولأجل تطبيق هذه الطريقة يتم اولا افتراض قيمة تقريبية x_0 القريبة من الجذر و يتم التعويض في المعادلة (2) لغرض الحصول على التكرار x_1 وتكرر العملية لعدة مرات فنحصل على متتابعة من التكرارات $\{x_n\}$، فنحصل على سلسلة من التعويضات وعلى النحو التالي

$$x_1 = g(x_0)$$
$$x_2 = g(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = g(x_n) \;,\; n=0,1,2,\dots$$

نتوقف عن التكرار بالجذر x_{n+1} عندما تكون الدقة المطلوبة وحسب الشرط التالي

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

او عندما نحقق اي شرط اخر مثل $|f(x)| < \epsilon$

يوجد اكثر من طريقة لكتابة المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة الخاصة $x=g(x)$ اي ان بالامكان وضع المعادلة المطلوب حلها بعدد لانهائي من الطرق من الصورة الخاصة بحيث يؤدي حلها الى تقاربها نحو الجذر المطلوب بينما قد يؤدي اختيار اخر الى تباعدها. فمثلا المعادلة التالية

$$f(x)=x^3-3=0$$

يمكن كتابتها بالطرق الخاصة والتي تكافئ أيا من المعادلات التالية:

(i) $x=x^3+x-3$

(ii) $x=\dfrac{3-x^3+5x}{5}$

(iii) $x=\dfrac{3}{x^3}$

مثال:

اوجد الجذر الحقيقي للمعادلة $f(x)=x^2-x-3=0$ قرب النقطة $x_0=2.5$، واذا كانت $x=g(x)$ جميعها تكافئ المعادلة المعطاة

(i) $x=x^2-3=g_1(x)$

(ii) $x=1+\dfrac{3}{x}=g_2(x)$

(iii) $x=\dfrac{9x-x^2+3}{8}=g_3(x)$

(iv) $x=\dfrac{x^2+3}{2x-1}=g_4(x)$

لو بدأنا بالنقطة $x_0=2.5$ وعوضنا في $g_1(x)$

$x_{n+1}=g_1(x_n)\quad,\ n=0,1,2,\dots$

$x_1=g_1(x_0)=g_1(2.5)=(2.5)^2-3=6.25-3=3.25$

$x_2=g_1(x_1)=(3.25)^2-3=10.5625-3=7.5625$

$x_3=g_1(x_2)=54.1914\quad,\quad x_4=2933.71\ ,\ \dots$

من القيم المكررة والمتولدة، يتبين ان $g_1(x)$ تبتعد كثيرا عن الجذر المضبوط لان القيم المتتابعة تتزايد بشكل كبير.

لو اخذنا $g_2(x)$

$$x_{n+1} = g_2(x_n) \Rightarrow x_1 = g_2(2.5) = 1 + \frac{3}{2.5} = 2.2$$

$$x_2 = g_2(x_1) = 1 + \frac{3}{2.2} = 2.363636 = 2.36364$$

$$x_3 = 2.26923 \;;\; x_4 = 2.32203 \;;\; x_5 = 2.29197$$

الجدول التالي يوضح القيم الناتجة من تطبيق الصيغة التكرارية (2) بالنسبة الى كل من الدوال اعلاه

n	$x_{n+1} = g_1(x_n)$	$x_{n+1} = g_2(x_n)$	$x_{n+1} = g_3(x_n)$	$x_{n+1} = g_4(x_n)$
1	3.25	2.2	2.40625	2.3125
2	7.5625	2.36364	2.35828	2.302802
3	54.1914	2.26923	2.33288	2.302776
4	2933.71	2.32203	2.31920	2.302776
5	8606642.63	2.29197	2.31176	2.302776

من الجدول اعلاه يمكن ملاحظة ① ان القيم المتولدة من التكرارات للدوال g_2 ، g_3 ، g_4 تتقارب للجذر المضبوط كلما زادت قيمة n ، بينما نلاحظ ان g_1 تتباعد عن القيمة التقريبية للجذر

② نلاحظ من العمود الأخير بان المراتب الستة الاولى تتطابق في كل من القيم التقريبية للتكرار الثالث ، الرابع والخامس وهذا انما يدل بان هذه المراتب الست الاولى تتطابق مع الجذر المضبوط للمعادلة

مثال : (واجب)

1- استعمل طريقة النقطة الثابتة لحل المعادلة $x = \cos x$ مبتدئا بالقيمة الابتدائية $x_0 = 1$ وتوقف عن التكرار عندما يتحقق $|x_n - x_{n-1}| < 0.0002$

2- اكتب المعادلة التالية $3x^3 + 14x^2 + 13x - 6 = 0$ بالشكل العام $x = g(x)$ بحيث انها متقاربة نحو الجذر الاول ثم تأكد اقرب الجذر لثلاث تكرارات.

Non linear simultanious equations

حلول منظومات معادلات غير خطية

بالامكان ايجاد الجذور الحقيقية لمنظومة المعادلات الغير خطية باكثر من متغير، وذلك بتعميم بعض طرق السابقة لايجاد جذر معادلة واحدة (طريقة نيوتن، طريقة النقطة الثابتة) - لحل منظومة مكونة من معادلتين بمتغيرين فقط، كذلك يمكن تعميمها لحل اي منظومة مكونة من m من المعادلات و m من المتغيرات.

ليكن (λ, μ) الحل المضبوط للمعادلتين، وان (x_0, y_0) حل تقريبي اولي

$$f(x,y)=0 \qquad \text{———} \quad (1)$$
$$g(x,y)=0$$

يمكن حل المعادلات المذكورة باحد الأساليب التالية :-

1) طريقة التكرار : علينا اولاً تحويل المعادلتين الى الصيغة

$$x = F(x,y) \qquad \text{———} \quad (2)$$
$$y = G(x,y)$$

نبتدأ بالقيمة التقريبية الأولية (x_0, y_0) ونولد متتالية من الحلول التقريبية $\{(x_i, y_i)\}$ من الصيغة التكرارية

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i) \qquad \text{———} \quad (3)$$
$$y_{i+1} = G(x_i, y_i)$$

ان هذا التكرار يتقارب بالشروط التالية

1- تكون الدوال F ، G وتفاضلها الجزئي الأول مستمر في النقاط المجاورة للجذر.

2- تحقق عدم المساواة التالية لكل النقاط حيث $K<1$

$$|F_x| + |F_y| \le K \quad \text{و} \quad |G_x| + |G_y| \le K \;, \; K<1.$$

والمثال التالي يبسط فكرة الحل.

Ex: Find sol^n of

$$x^2 - xy + 20 = 0 \Rightarrow xy = x^2 + 20$$

$$y^2 - 2xy + 10 = 0 \Rightarrow 2xy = y^2 + 10$$

يمكن صياغتها على شكل $x=g(x)$

$$y = x + \frac{20}{x}$$

$$x = \frac{y}{2} + \frac{5}{y}$$

والعلاقة العامة للتكرار هي :

$$y_n = x_n + \frac{20}{x_n} \quad ; \quad x_{n+1} = \frac{y_n}{2} + \frac{5}{y_n}$$

فاذا تم تعويض x_n في العلاقة الاولى فيمكن ايجاد قيمة y_n المناظرة وبتعويضها في المعادلة الثانية نجد قيمة x_{n+1} الجديدة وبتعويض قيمة x_{n+1} في المعادلة الاولى والناتج y_{n+1} في المعادلة الثانية نحصل x_{n+2} ، واذا استعملنا $x_0=5$ كقيمة اولية في عملية التكرار نحصل على القيم التالية :

$$n=0 , \quad y_0 = x_0 + \frac{20}{5} = 5 + \frac{20}{5} = 9$$

$$(x_0, y_0) = (5, 9)$$

$$, \quad x_1 = \frac{y_0}{2} + \frac{5}{y_0} = \frac{9}{2} + \frac{5}{9} = \frac{91}{18} = 5.0555556$$

$$y_1 = x_1 + \frac{20}{x_1} = 5.0555556 + \frac{20}{5.0555556} = 9.0115995$$

n	x	y	
0	5	9	
1	5.0555556	9.0115995	$\lvert x_3 - x_2 \rvert = 0.00004866 < 0.5 \times 10^{-4}$
2	5.0606402	9.0127094	
3	5.0611268	9.012816	$\lvert y_3 - y_2 \rvert = 0.0001066 \nless 0.5 \times 10^{-4}$

System of linear equations

الحلول العددية لمنظومة المعادلات الخطية

في العديد من التطبيقات العملية تحوي المشكلة على مجموعة من المعادلات الخطية تسمى بمنظومة المعادلات الخطية وعندما تكون المنظومة متكونة من معادلتين خطيتين بمجهولين x, y اي ان

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

بحيث تكون $a_1 \pm b_1 \neq 0$, $a_2 \pm b_2 \neq 0$ فهنالك قيمة لـ x, y تحقق المعادلتين تسمى بالحل الآني للمعادلات او حل منظومة المعادلات الخطية. وهنالك ثلاثة حالات يمكن وصف حل المعادلات الخطية بيانيا على النحو التالي:

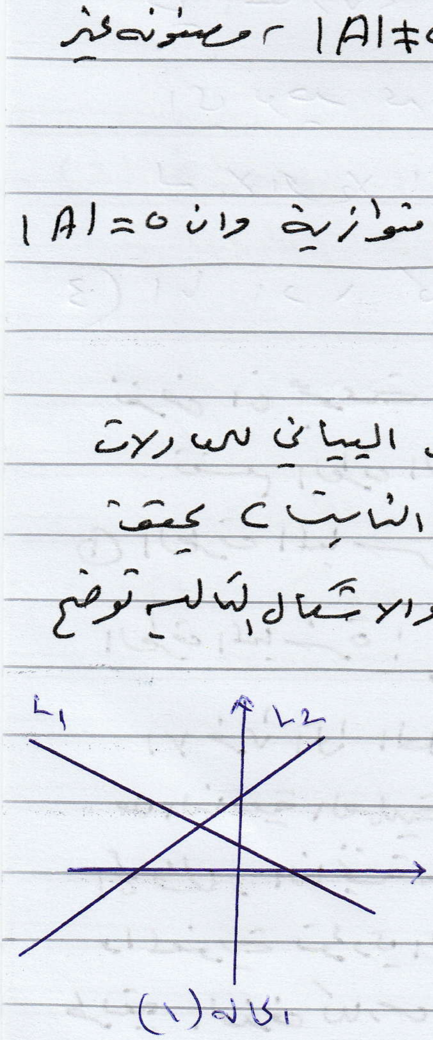
1) عندما يكون للنظام حل وحيد واحد فان المعادلات الخطية تتقاطع في نقطة واحدة ويسمى الحل الآني، اي قيمة المحدد $|A| \neq 0$ مصفوفة غير شاذة حيث

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

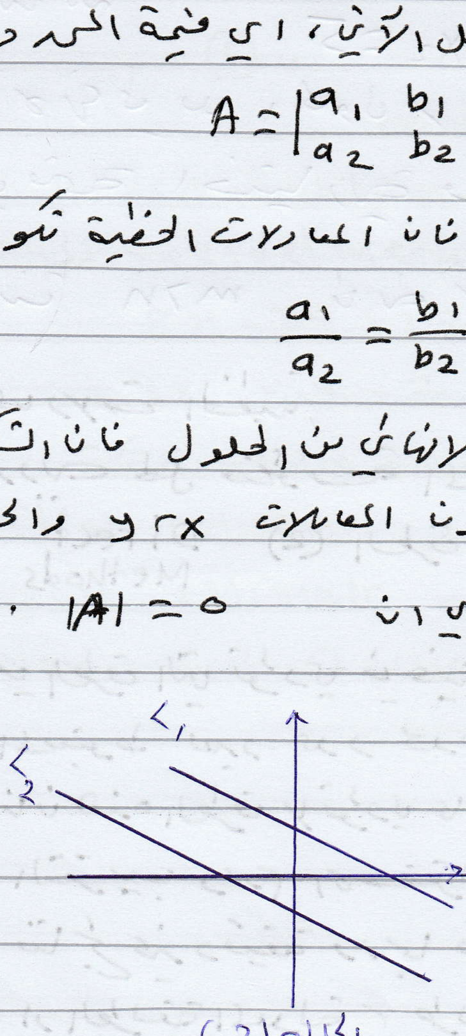
2) عندما لا يكون للمنظومة حل فان المعادلات الخطية تكون متوازية وان $|A| = 0$ وان

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

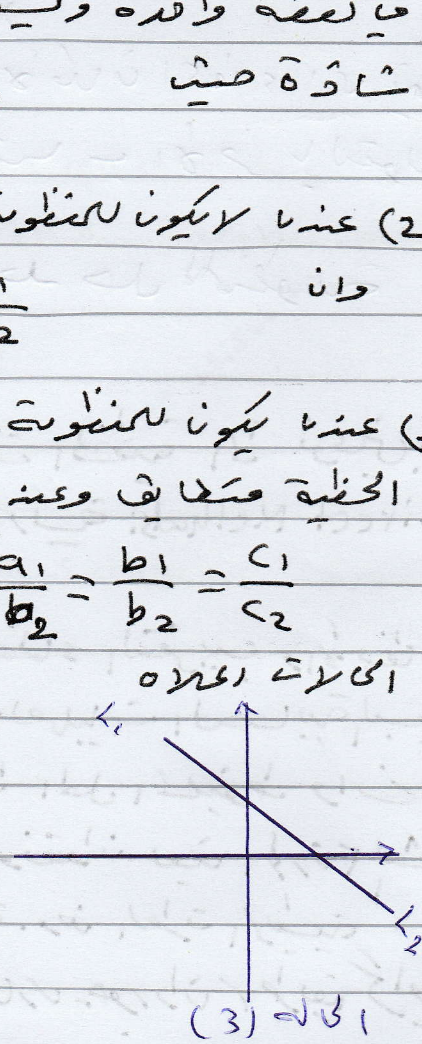
3) عندما يكون للمنظومة عدد لانهائي من الحلول فان الشكل البياني للمعادلات الخطية متطابق وعندما تكون المعاملات x, y والحد الثابت c يحقق اي ان $\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, $|A| = 0$ والاشكال التالية توضح الحالات الثلاث



الحالة (1)



الحالة (2)



الحالة (3)

يمكن كتابة المنظومة العامة المتكونة من m من المعادلات الخطية والتي تحتوي على n من المجاهيل بالشكل التالي

$$AX = b \qquad \text{———} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

او بشكل عام:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

يمكن مناقشة حلول المنظومة (*) في الحالات الثلاث وهي:

1) عندما $n=m$ اي ان مصفوفة المعاملات A مصفوفة مربعة وفي هذه الحالة تكون للمنظومة حل وحيد.

2) عندما $m<n$ فان للمنظومة حل ولكنه ليس وحيد، كما في المعادلة التالية

$$x_1 + 3x_2 = 5$$

اي يوجد عدد لانهائي من الحلول لانه بالامكان اعطاء اي قيم لـ x_1 او x_2 اي قيمة اختيارية واحتساب الآخر بالتعويض.

3) اما اذا كانت $m>n$ فانه لا يوجد حل للمنظومة

تقسم الطرق العددية لحل منظومة المعادلات الخطية الى نوعين:

① الطرق المباشرة Direct Methods (2) الطرق التكرارية indirect Methods:

الطرق المباشرة: وهي الطرق التي تؤدي في غياب اخطاء التقريب والاخطاء الاخرى الى الحل المضبوط بعد عدد محدد من العمليات الحسابية البسيطة.

من الناحية العملية فان هذه الطرق لا تؤدي عادة الى الحل المضبوط وان الاخطاء الناتجة من التقريب وعدم الاستقرارية وفقدان بعض المراتب العشرية والمعنوية تؤدي الى نتائج غير دقيقة وربما خاطئة. ومن الطرق الرئيسية، طريقة الحذف لكاوس - او الطريقة المعدلة، طريقة كاوس-جوردان، طريقة كرامر

problems:

(1) (i) Use the Gauss - seidel method to obtain the solution for a given system

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}\right\} \text{---} (1)$$

$x^{(0)} = 0$.

(ii) Solve the above System by Jacobi method.

(iii) Use Cramer's rule to solve the system (1).

(2) (i) Solve the given system of equations by using Gauss - seidel method and Jacobi method

$$8x - 3y + 2z = 20$$

$$4x + 11y - z = 33$$

$$6x + 3y + 12z = 35$$

with initial values $x^{(0)} = 0$.

(ii) Can you estimate exact solution from results you get? what?