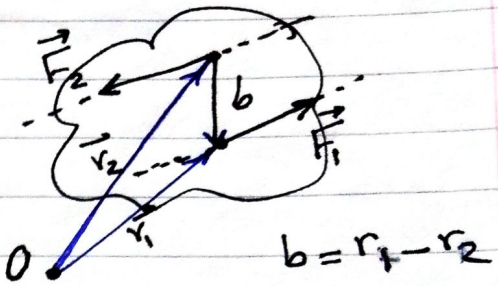
• الازدواج البسيط

Simple Couple

System of two forces of equial magnitude but opposite direction acting along parallel lines.



$b = r_1 - r_2$

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$= \vec{r}_1 \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{b} \times \vec{F}_1$$

$$\vec{\tau} = \vec{b} \times \vec{F}$$ عزم الازدواج where $\vec{b} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ذراع الازدواج

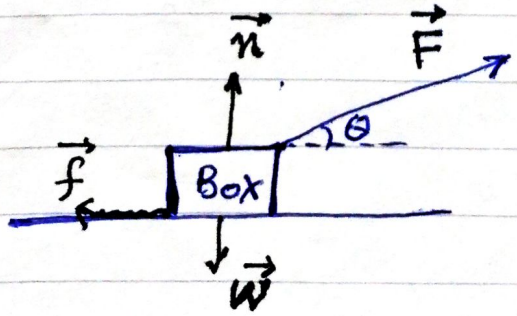
$F = F_1 = F_2$

• التوازن (توازن الجسم) Statics: Equilibrium of body

اذا كان المجموع الابجبري للعزوم المؤثرة على جسم ما صفر عندئذ يقال ان الجسم في حالة توازن ميكانيكي فاذا كان الجسم ساكن سمي توازن ميكانيكي واذا كان متحركا بسرعة منتظمة فهذا توازن حركي

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

فمثلا اذا سحب جسم المبين في الشكل بقوة $\vec{F}$ وكان الجسم في حالة توازن حركي dynamic balance



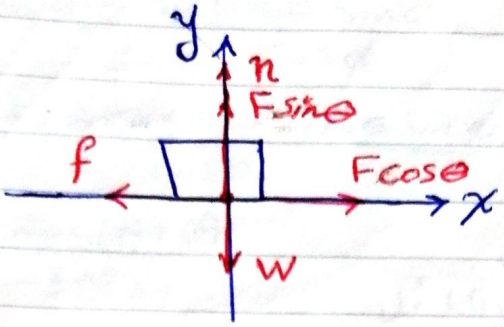
$\vec{F}$: force of man on box

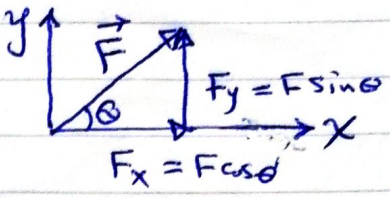
$\vec{n}$: force of contact of earth surface agnist box

$\vec{w}$: weight of box

$\vec{f}$: friction force

نحلل القوة المؤثرة $\vec{F}$ الى مركباتها :

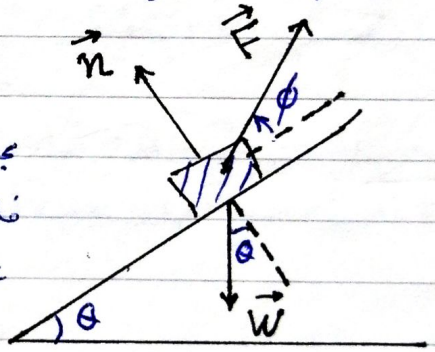




$$\sum_i F_{ix} = F\cos\theta - f$$

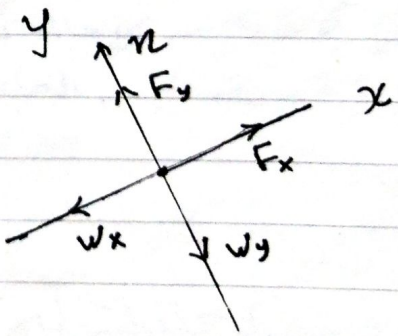
$$\sum_i F_{iy} = n + F\sin\theta - w$$

أما اذا كان الجسم على سطح أملس مائل بزاوية θ وسحب بقوة $\vec{F}$ تميل بزاوية ϕ عن السطح المائل كما في الشكل :



بما ان السطح أملس $\vec{f} = 0$
فاذا كانت القوة كافية لتحريك الجسم بـ لا تزلق على السطح فإن الجسم يكون في حالة توازن سكانيكي ، وبالتالي

$$\sum F_{ix} = 0 ,$$
$$\sum F_{iy} = 0$$



1- $\sum F_{ix} = F_x - W_x = 0$

$= F\cos\phi - W\sin\theta = 0$

2- $\sum F_{iy} = n + F_y - W_y = 0$

$= n + F\sin\phi - W\cos\theta = 0$

$\therefore n = W\cos\theta - F\sin\phi$

ومن الشرط الأول :

$F = W\sin\theta / \cos\phi$

$$\therefore n = W\cos\theta - \frac{W\sin\theta\sin\phi}{\cos\phi}$$

$$= W\frac{\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi}{\cos\phi}$$

$$= W\frac{\cos(\theta+\phi)}{\cos\phi}$$

تمثل العلاقة بين رد الفعل ووزن الجسم على السطح المائل

• توازن الجسم الصلد Equilibrium of rigid body

اذا اثرت قوتين على جسم فلكي يكون الجسم في حالة توازن يجب ان تكون هاتان القوتان :

١- متساويتين في المقدار

٢- متعاكستين في الاتجاه

٣- لهما نفس خط التأثير

لكي يصبح الجسم في حالة توازن للحركة الانتقالية فإن محصلة القوى المؤثرة على الجسم الصلد يجب ان تساوي صفر

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{-----(1)}$$

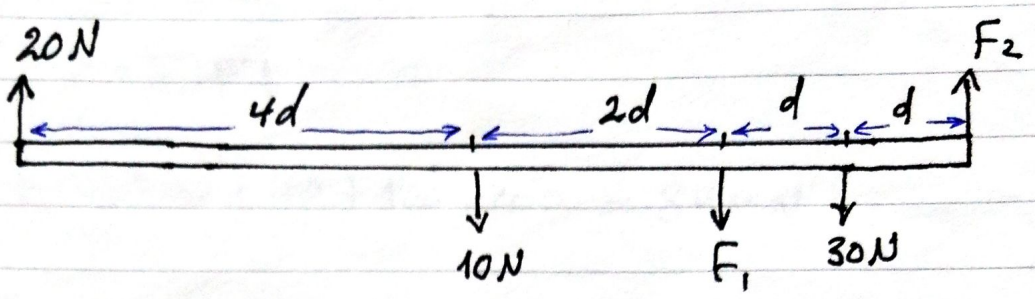
ولكي يكون الجسم في حالة توازن للحركة الدورانية فإن محصلة العزوم المؤثرة على الجسم الصلد يجب ان تساوي صفر بالنسبة لأي نقطة

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \text{-----(2)}$$

تسمى معادلة (١) الشرط الأول للتوازن

تسمى معادلة (٢) الشرط الثاني للتوازن

Ex: A uniform rod acted upon by various forces is in equilibrium. Evaluate the unknown forces.



Sol

For equilibrium $\sum \vec{\tau}_i = 0$ about any arbitrary point.

نأخذ محور الدوران حول النهاية الثانية (F_2)

Taking the torque about the another end we have

العزوم المؤثرة في الاتجاه موجبة والسالبة بسبب محور الدوران سالبة

والعزوم المؤثرة في الأسفل سالبة،

$$(20N)(-8d) + (-10N)(-4d) + (-F_1)(-2d) + (-30N)(-d) = 0$$

$$-160d + 40d + 2F_1 d + 30d = 0$$

$$-90d + 2F_1 d = 0 \Rightarrow F_1 = 45N$$

$$\sum F\uparrow = \sum F\downarrow$$

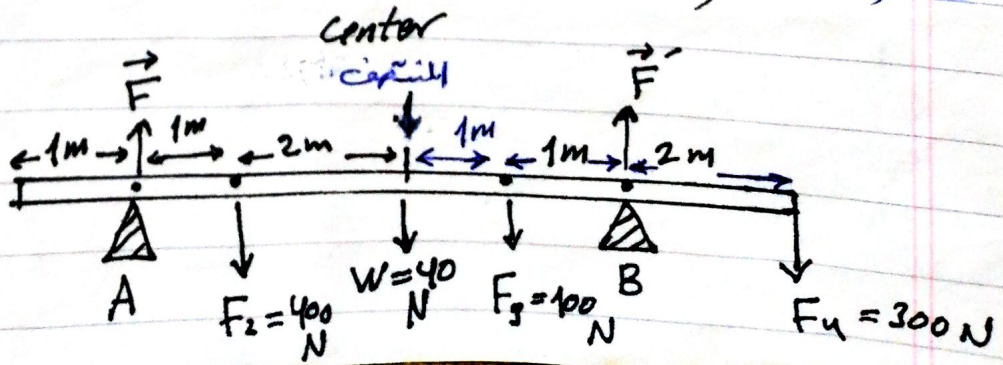
$$20 + F_2 = 10 + F_1 + 30$$

$$20 + F_2 = 10 + 45 + 30 \rightarrow F_2 = 65N$$

"واجب"

Ex2: A uniform rod of weight (40N) acted by various forces is balanced on points A and B as shown in fig.

Find the unknown forces F & F' (reaction forces) ردّ الفعل



بتطبيق شروط التوازن للحركة
الانتقالية والدورانية

Sol

1- $\sum \vec{F_i} = 0$

(or) $\sum F\uparrow = \sum F\downarrow$

$$F + F' = 400 + 40 + 100 + 300 = 840\,N \quad \text{---(1)}$$

2- $\sum \vec{\tau_i} = 0$

باختيار محور الدوران عند نقطة B
الاشارة عند B موجبة

$(-300)(2) + (-100)(-1) + (-40)(-2) +$ عند B سالب
$(-400)(-4) + F(-5) = 0$

$$-600 + 100 + 80 + 1600 - 5F = 0 \Rightarrow \boxed{F = 236\,N}$$

$$F' = 840 - F = 840 - 236 = \boxed{604\,N}$$

Center of parallel forces

• مركز القوى المتوازية
ونعني اصطلاحا نقطة تأثير القوة

$$r_c = \frac{\sum F_i r_i}{\sum F_i} = \frac{F_1 r_1 + F_2 r_2 + \cdots}{F_1 + F_2 + \cdots}$$

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i} \quad , \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}$$

Center of mass

• مركز الكتلة أو مركز الثقل

In case of a system of particles

اذا كان النظام عبارة عن مجموعة من الجسيمات :

$$r_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

in case of a rigid body

وفي حالة الجسم الصلد $dm = \rho dV$

$m = \int \rho dV$ (اذا كان الجسم متجانس الكثافة)

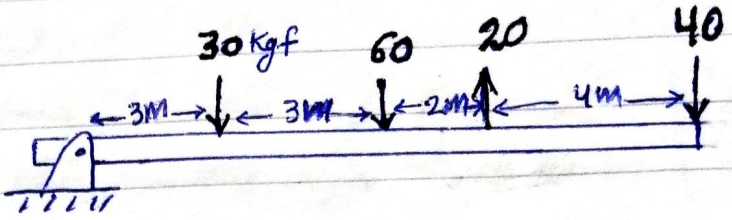
$$r_c = \frac{\int \rho r dV}{\int \rho dV} = \frac{\int r dV}{\int dV} = \frac{\int r dV}{V}$$

هذا يعني ان مركز الثقل يعتمد على ابعاد الجسم .

$$x_c = \frac{\int x dV}{V} \quad , \quad y_c = \frac{\int y dV}{V}$$

Ex: A parallel forces system acts on the lever shown in Figure - Determine the magnitude and position of resultant.

Sol



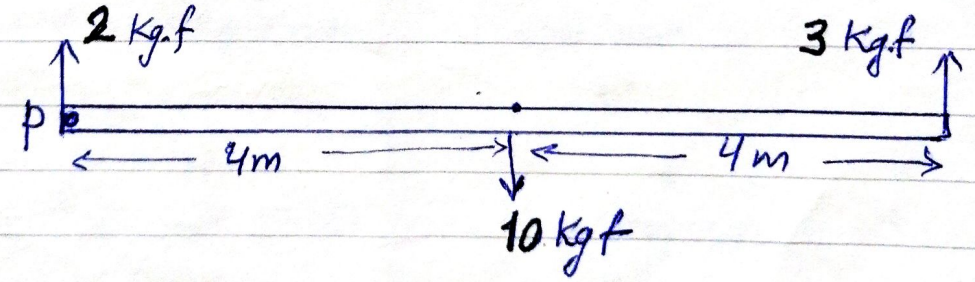
$\sum F_i = -30-60+20-40 = -110$ kg.f المحصلة

$\sum x_i F_i = 3(-30) + 6(-60) + 8(+20) + 12(-40)$

$= -770$ m.kg.f

$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{-770}{-110} = 7$ m الموقع

Ex2: Find the center force and resultant of the parallel forces acts on the rod as shown in the figure below.



$\sum x_i F_i = (4)(-10) + (8)(3) = -16$ m.kg.f بأخذ محور الدوران عند النقطة P

$\sum F_i = 2-10+3 = -5$ kg.f

$x_c = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{-16}{-5} = 3.2$ m